高等数学

GAODENG SHUXUE

策划编辑：李　松
责任编辑：边丽新
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-5828-5

9 787563 558285 >

定价：39.80元

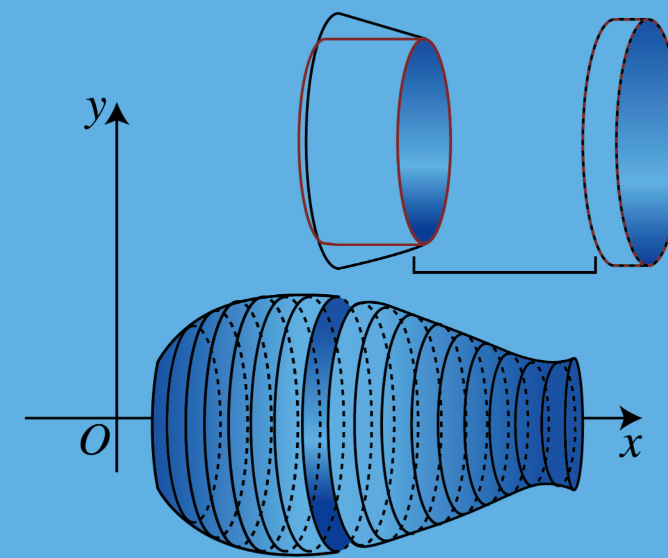
高等数学

主编　赵巧蓉　张琪

北京邮电大学出版社

X-B

“十四五”职业教育国家规划教材

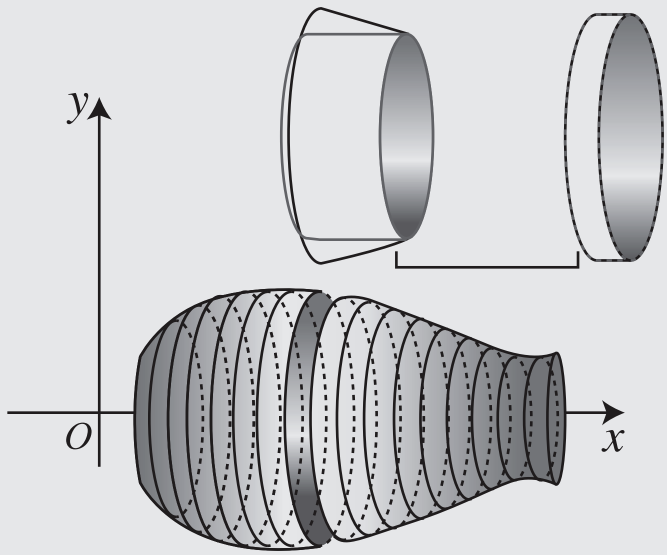


高等数学

主编　赵巧蓉　张　琪
主审　杨俊萍

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

“十四五”职业教育国家规划教材



高等数学

主编 赵巧蓉 张 琪
主审 杨俊萍

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是"十四五"职业教育国家规划教材.

本书分为基础模块和实践模块两部分,共七章,内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、函数的积分、常微分方程、Mathematica 数学实验、数学建模简介.基础模块部分每一章最后都精选一些数学文化素材,介绍数学思想的形成背景以及数学家的生平,供教师组织教学内容使用.

本书既可作为高等职业院校的教材,也可供相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 赵巧蓉,张琪主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2019.8(2025.1 重印)
ISBN 978-7-5635-5828-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… ②张… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 170441 号

策划编辑: 李 松 **责任编辑:** 边丽新 **封面设计:** 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码: 100876
发 行 部: 电话:010-62282185 传真:010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 三河市龙大印装有限公司
开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张: 13.25
字 数: 322 千字
版 次: 2019 年 8 月第 1 版
印 次: 2025 年 1 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-5635-5828-5 定 价:39.80 元

前言

党的二十大报告指出:“教育是国之大计、党之大计.培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题.育人的根本在于立德.”职业教育的核心是培养人,不仅要培养学生的专业技能,更要立德树人,培育学生健全的人格,培养学生的职业精神和可持续发展能力.“高等数学”是职业院校一门重要的公共基础课,为学生后续专业课程的学习和解决实际问题奠定了坚实的理论基础,能够锤炼学生的意志品质,培养学生的科学精神.在数学课程的改革与建设中,必须以人为本,满足学生的差异性和个性发展的要求,注重数学思想的渗透,对不同层次的学生制订不同的培养目标,努力使每个学生成才.教材建设是课程建设的重要内容,教材是教学的重要载体.我们通过多次调研,编写了这本适用于理工类专业的教材.本教材充分考虑学生的数学基础,对数学知识进行了必要的调整,简化理论,注重应用,传承思想.

本教材分为两个部分——基础模块和实践模块,内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、函数的积分、常微分方程、Mathematica数学实验、数学建模简介.本教材具有以下特点.

(1)内容简洁,以让学生掌握数学思想的精髓为重点,在叙述和讲解上突出数学思想的实践背景,增加学生学习的感性成分.

(2)注重以人为本,充分考虑高职学生的学习特点,内容深入浅出,较好地处理了初等数学与高等数学的衔接.

(3)降低了对理论的要求,注重对知识的应用,配有结合实际的相关例题与习题.例题与习题数量合适,难度适中,以培养学生的基本学习能力为重点.

(4)为贯彻落实党的二十大精神,达到高等数学“与思想政治理论课同向同行,形成协同效应”的教育要求,本书主要从数学文化视角挖掘高等数学课程的育人元素,提炼高等数学课程中所蕴含的数学素养、文化自信、人文精神等,让学生领会数学文化博大精深的同时,在认知、情感以及行为上把握正确的方向,从而实现知识传授、能力培养与价值

塑造的统一.

(5)将数学实验、数学建模融入其中,体现高职教学的实践性、应用性.

本教材由山西职业技术学院赵巧蓉和张琪任主编,山西职业技术学院胡志立、冯文丽、张俊青和李薇,山西工程职业学院王改燕,山西药科职业学院杨素芳参与编写.具体编写分工为:王改燕编写第1章1.1和1.2节,胡志立编写第1章的1.3和1.4节,赵巧蓉编写第2章和第3章,张琪编写第4章,杨素芳编写第5章,张俊青编写第6章,李薇编写第7章,冯文丽编写附录.赵巧蓉和张琪负责统稿工作.

山西职业技术学院的杨俊萍教授进行了教材的审稿工作,并在编写过程中提出了许多宝贵意见,在此致谢!

编写教材是一项影响深远的教育工作,我们深感责任重大. 由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请各位读者指正.

编　者

目录

第一部分　基础模块

第二部分　实践模块

第一部分　基础模块

第 1 章　函数与极限

随着科学技术的不断发展，微积分学在自然科学、社会科学及应用科学等各个领域的应用越来越广泛. 微积分学的知识对于解决许多工程实际问题尤为重要. 微积分学是微分学和积分学的总称，它的主要研究对象是函数. 极限是微积分学研究的主要工具. 本章将对函数知识做必要的复习与补充，然后着重讨论函数的极限与连续性.

【学习目标】

知识目标：

· 理解函数概念，掌握基本初等函数的图像和性质；

· 理解复合函数及初等函数；

· 掌握极限的概念及运算；

· 了解函数的连续性.

能力目标：

· 能利用函数的概念、图像和性质解决一些实际问题；

· 会对复合函数进行分解与复合；

· 会求数列、函数的极限.

素质目标：

· 建立数形结合的数学思想，体会数与形的完美统一，领悟数学与自然的和谐美；

· 学会用函数的语言描述事物间的各种关系，通过学习函数把握事物相互联系和相互制约的辩证唯物主义观点；

· 理解极限的思想方法，学会用极限的思想方法分析问题和解决问题.

我们欣赏数学，我们需要数学.

数学是一门演绎的学问，从一组公设，经过逻辑的推理，获得结论.

——陈省身

1.1 函　　数

函数是刻画运动变化中变量与变量之间依赖关系的数学模型，是微积分的主要研究对象. 在科学技术和实际生活中，各种变量之间的关系都是函数关系. 本节主要在中学已有函数知识的基础上进一步研究函数的有关概念和性质.

1.1.1　函数的概念

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在运动和变化着. 在事物的运动变化过程中存在着多种变量，其中一个变量的变化往往决定了另一个变量的变化，且在变化过程中，这两个变量之间存在着确定的依赖关系.

下面给出函数的定义.

定义 1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在数集 D 内任取一个数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 都有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 集合 D 称为函数的**定义域**. 当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的所有值时，对应的函数值的集合称为函数的**值域**，记作 M，即 $M=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$.

定义域与对应法则是函数的两个**基本要素**，当定义域与对应法则都确定后函数就确定了. 只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解　由函数的表达式可知，x 必须满足如下不等式组才能使函数有意义.

$$\begin{cases}3x-2>0\\3x-2\neq 1\end{cases},$$

解得 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$，即 $x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$，所以函数的定义域为 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

函数的表达形式一般有解析式、图像式、表格式三种. 我们常见的函数都是由一个统一的解析式来表示的，但实际中也会遇到由两个以上的解析式来表示的函数.

分段函数　在自变量不同的取值范围内用不同的解析式来表示的函数称为分段函数. 它的定义域是各段自变量取值集合的并集. 求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的解析式进行计算. 例如：

函数 $$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

又如符号函数 $$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

例2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2\leqslant x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$.

(1)求 $f(x)$的定义域,并找出其分段点;

(2)求 $f(-1)$,$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$;

(3)作出 $f(x)$的图形.

解 (1)函数 $f(x)$的定义域是$[-2,+\infty)$,分段点是 $x=0$ 和 $x=1$.

(2)因为 $x=-1$ 在区间$[-2,0)$内,所以函数值 $f(-1)$由式子 $f(x)=x+2$ 来确定,于是得 $f(-1)=-1+2=1$;因为 $x=0$ 在区间$[0,1)$内,所以函数值 $f(0)$由式子 $f(x)=x^2$ 来确定,于是得 $f(0)=0$.

同理 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,类似可得 $f(1)=1$,$f(2)=1$.

(3)函数 $f(x)$的图形如图 1-1 所示.

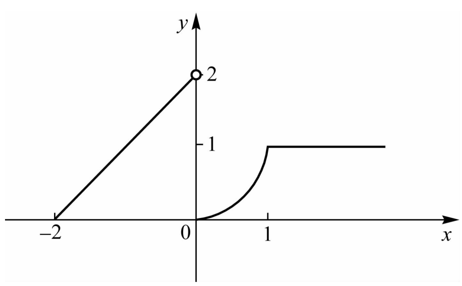


图 1-1

注意 (1)函数定义域一般表示成集合或区间的形式;

(2)分段函数的图像是分析函数的重要依据,要求学生重点掌握.

例3 一个停车场第1小时收费5元,以后每小时收费3元,每天最多收费15元,不到1小时都按1小时来计算,试求停车费用与时间的函数关系,并说明其实际意义.

解 设停车场停车 t 小时的费用为 y,则

$$y=\begin{cases}5, & 0<t\leqslant 1\\ 5+3(t-1), & 1<t\leqslant 4\\ 15, & 4<t\leqslant 24\end{cases},$$

注意 t 取整数.

或

$$y=\begin{cases}5, & 0<t\leqslant 1\\ 8, & 1<t\leqslant 2\\ 11, & 2<t\leqslant 3\\ 14, & 3<t\leqslant 4\\ 15, & 4<t\leqslant 24\end{cases}.$$

由此可以看出,为了节省费用,应该尽量控制在整时内,由于一天的停车费用最高不超过 15 元,所以,当停车时间超过 3 小时,可以不急于取车.

1.1.2　函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 是以原点为中心的对称区间,如果对于 $x\in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**;如果总有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**. 偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例如,函数 $y=\sin x$ 为奇函数,$y=\cos x$ 为偶函数.

2. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对于 D 内的任意 x 值,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 D 上**无界**. 例如,在定义域$(-\infty,+\infty)$内$|\sin x|\leqslant 1$,所以正弦函数在定义域内有界. 又如,函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$是无界函数. 因为对于 $\mathbf{R}$ 内的一切 x,不存在正数 M,使$|x^2|\leqslant M$成立.

3. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在 I 上是单调增加的(或单调减少的). 单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**. 相应的区间称为函数的**单调区间**.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的,在$(-\infty,0]$上是单调减少的.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在不为零的常数 T,使关系式 $f(x+T)=f(x)$对于定义域内

的任意一点 x 都成立，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，其中 T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期，通常满足这个等式的最小正数 T 称为该函数的最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

1.1.3 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数，值域为 M，若对于每一个 $y\in M$，都可以由关系式 $f(x)=y$ 确定唯一的 x 值与之对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以将函数 $y=f(x)$ 的反函数用 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$ 表示.

例 4 求函数 $y=\sqrt{x}+1$ 的反函数.

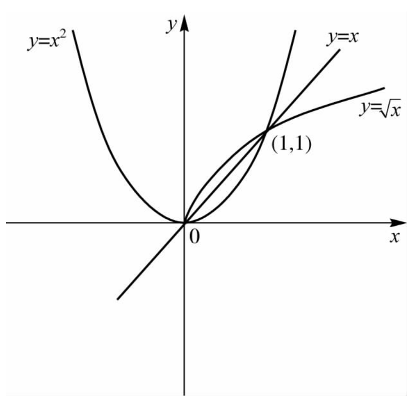
解 由 $y=\sqrt{x}+1$ 解得 $x=(y-1)^2$，对调 x 与 y，得 $y=(x-1)^2$. 所以，函数 $y=\sqrt{x}+1$ 的反函数为 $y=(x-1)^2(x\geqslant 1)$.

注意 互为反函数的两个函数图像以直线 $y=x$ 对称，单调性相同，定义域和值域互换.

1.1.4 基本初等函数

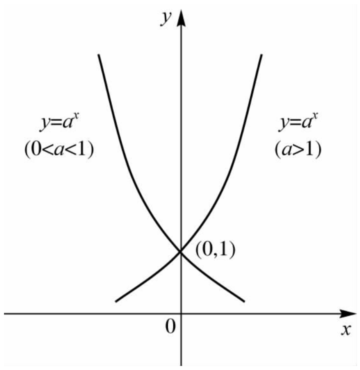
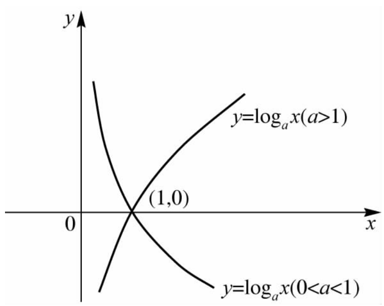
在中学阶段，我们学习了幂函数、指数函数、对数函数，关于它们的图像和性质如表 1-1 所示.

表 1-1

函数	图像	性质	
幂函数 $y=x^{a}$		当 $a>0$ 时 (1)都过(0,0)，(1,1)点； (2)在第一象限单调增加	当 $a<0$ 时 (1)都过(1,1)点； (2)在第一象限单调减少

幂函数

续表

函数	图像	性质	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$ 指数函数		当 $0<a<1$ 时 (1)都过(0,1)点; (2)在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少; (3)当 $x<0$ 时,$y>1$;当 $x>0$ 时,$y<1$	当 $a>1$ 时 (1)都过(0,1)点; (2)在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加; (3)当 $x<0$ 时,$y<1$;当 $x>0$ 时,$y>1$
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$ 对数函数		当 $0<a<1$ 时 (1)都过(1,0)点; (2)在定义域 $(0,+\infty)$ 内单调减少; (3)当 $0<x<1$ 时,$y>0$;当 $x>1$ 时,$y<0$	当 $a>1$ 时 (1)都过(1,0)点; (2)在定义域 $(0,+\infty)$ 内单调增加; (3)当 $0<x<1$ 时,$y<0$;当 $x>1$ 时,$y>0$

我们知道,三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数.

以任意角 α 的顶点 O 为坐标原点,以角 α 的始边的方向作为 x 轴的正方向,建立直角坐标系,$P(x,y)$为角 α 终边上一点,记 $r=OP$,定义

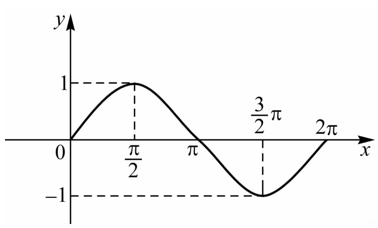
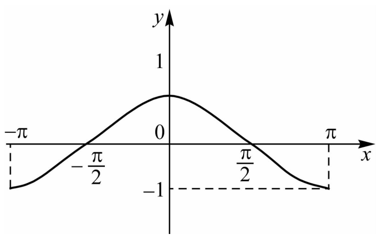
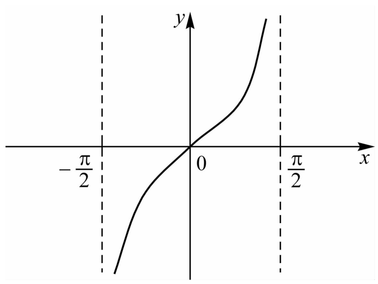
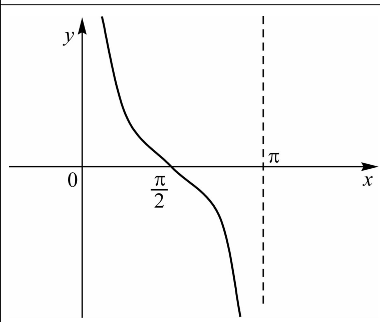
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\tan\alpha=\frac{y}{x}$$

为角 α 的**正弦函数**、**余弦函数**和**正切函数**.

那么,$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{x}{y}$ 称为角 α 的**余切函数**,$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x}$ 称为角 α 的**正割函数**,$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}$ 称为角 α 的**余割函数**.

可以看出,$\cot\alpha,\sec\alpha,\csc\alpha$ 分别是正切、余弦和正弦的倒数.所以,我们重点学习前三个函数的性质(见表 1-2).

表 1-2

函　数	图　像	定义域	周期	奇偶性	有界性（值域）	单调性
$y=\sin x$		**R**	2π	奇	有界 $[-1,1]$	在$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调增加；在$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调减少
$y=\cos x$		**R**	2π	偶	有界 $[-1,1]$	在$(2k\pi-\pi,2k\pi)$（$k\in\mathbf{Z}$）内，单调递增；$(2k\pi,2k\pi+\pi)$（$k\in\mathbf{Z}$）内，单调递减
$y=\tan x$		$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）	π	奇	无界 **R**	在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调增加
$y=\cot x$		$x\neq k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）	π	奇	无界 **R**	$(k\pi,k\pi+\pi)$（$k\in\mathbf{Z}$）内，单调递减

由于三角函数是周期函数，所以由反函数的定义可知，三角函数在其定义域上不存在反函数；但是如果把定义域限制在一定范围上就有了反函数（见表 1-3）.

三角函数

定义 3　正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，叫作**反正弦函数**，记为 $y=\arcsin x$. $\arcsin x$ 表示一个正弦值为 x 的角，该角的范围为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数，叫作**反余弦函数**，记为 $y=\arccos x$. $\arccos x$ 表示一个余弦值为x 的角，该角的范围为$[0,\pi]$.

正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，叫作**反正切函数**，记为 $y=\arctan x$. $\arctan x$ 表示一个正切值为x 的角，该角的范围为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

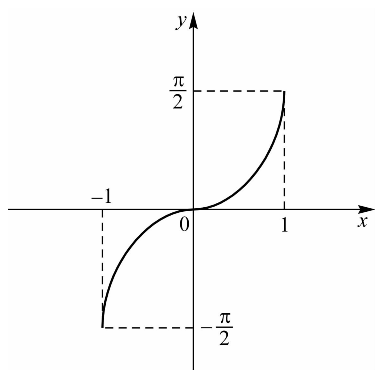
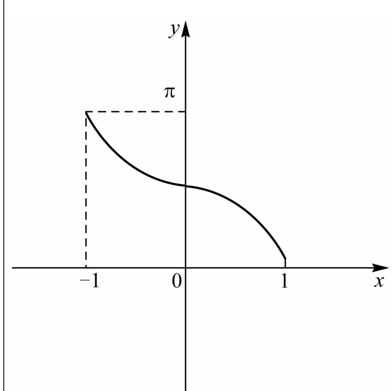
余切函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数，叫作**反余切函数**，记为 $y=\operatorname{arccot} x$. $\operatorname{arccot} x$ 表示一个余切值为x 的角，该角的范围为$(0,\pi)$.

例如：

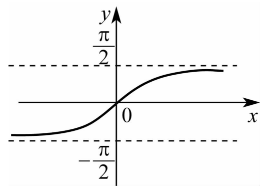
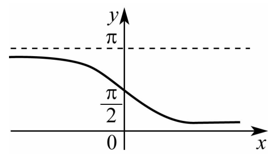
$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3};\quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};\quad \arcsin 0=0;\quad \arccos 0=\frac{\pi}{2};$$

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4};\quad \arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3};\quad \operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}.$$

表 1-3

函　数	定义域	值　域	图　像	性　质
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		在$[-1,1]$上单调增加，奇函数
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		在$[-1,1]$上单调减少，非奇非偶函数

续表

函　　数	定义域	值　　域	图　　像	性　　质
$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		在$(-\infty,+\infty)$上单调增加,奇函数
$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$		在$(-\infty,+\infty)$上单调减少,非奇非偶函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 其定义图像和性质要求学生熟练掌握.

1.1.5　复合函数

我们常常会遇到这样的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$, $y=\sin x^2$ 等,它们由我们熟悉的指数函数、三角函数等形成,对于这样的函数我们称为复合函数.

定义 4　设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2,且 $u=\varphi(x)$的值域与 D_1 的交集非空,则 y 通过中间变量 u 构成了 x 的函数,把这个函数称为 x 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$.

例如,函数 $y=\sin x^2$ 由函数 $y=\sin u$, $u=x^2$ 复合而成.

注意　(1)函数可以由多个函数经过多次复合而成. 例如,函数 $y=\sqrt{\cos 2x}$是由函数 $y=\sqrt{u}$, $u=\cos v$, $v=2x$ 复合而成.

(2)复合函数中所提的交集非空是必须的,也就是说,不是任意两个函数都能够复合成一个函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$, $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数,因为 $y=\arcsin(2+x^2)$是无意义的.

例 5　指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\ln(3-\sin x)$;

(2) $y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$;

(3) $y=\sin(\lg 2^x)$.

解 (1) $y=\ln(3-\sin x)$ 由 $y=\ln u, u=3-\sin x$ 复合而成；

(2) $y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ 由 $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=\frac{x}{2}$ 复合而成；

(3) $y=\sin(\lg 2^x)$ 由 $y=\sin u, u=\lg v, v=2^x$ 复合而成.

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，函数 $y=1+\frac{2\sin x^2}{\ln\tan x}$，$y=\log_3\cos x^2$，$y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$ 都是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各题中的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\sqrt{x^2}$，$y=|x|$；

(2) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$；

(3) $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x-1}$；　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$；　(4) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$；

(5) $y=\frac{1}{x^2+1}$；　(6) $y=\lg(3x+1)$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0 \\ x-1, & x\leqslant 0 \end{cases}$，求 $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^2+\cos x$；　(2) $y=x\sin x$；　(3) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x+3$；　(2) $y=x^3-1$.

6. 说明下列函数的复合过程.

(1) $y=(2x+3)^{10}$；　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\ln(\sin x)$；　(4) $y=\lg[\lg(\lg x)]$.

7. 某工厂生产某种产品，每件产品的出厂价为 50 元，其成本为 25 元. 因为在生产过程中，平均每生产一件产品有 0.5 m^3 污水排出，所以为了净化环境，工厂设计了两种方案对污水进行处理，并准备实施.

方案 1:工厂污水先净化处理后再排出. 每处理 1 m^3 污水所用原料费为 2 元,并且每月排污设备损耗费为 30 000 元.

方案 2:工厂将污水排到污水厂统一处理,每处理 1 m^3 需付 14 元的排污费.

问题:

(1)设工厂每月生产 x 件产品,每月利润为 y 元,分别求出依方案 1 和方案 2 处理污水时 y 与 x 的函数关系式.

(2)设工厂每月生产 6 000 件产品,你若是该厂厂长,在不污染环境又节约资金的前提下,应选用哪种处理污水的方案?

1.2 极限的概念

中国是一个数学大国,有着悠久的历史文化和辉煌的数学成就. 秦汉数学简牍与古埃及纸草书、古巴比伦数学泥板、古希腊数学文献和古印度《绳法经》并称世界五大古文明的数学经典. 我国的《九章算术》中,负数概念及“正负术”(正数、负数的加减运算法则)的提出,比印度和欧洲建立负数的概念分别早了约 800 年和 1 600 年. 祖冲之使中国在圆周率的计算方面领先西方约 1 000 年,杨辉三角的发现早于其他国家 400 多年,“中国剩余定理”比高斯创用的同类方法早 500 多年.

极限思想在我国古代也很早就出现了,《庄子·天下篇》中写道:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”意思是:一尺长的木棒,每天截去一半,永远也截不完. 上述表述如何用数学形式来表示呢?

我国古代数学家刘徽注解《九章算术》时提出了“割圆术”——用圆的内接正多边形穷竭的方法求圆的面积.“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.”这就是极限的思想. 刘徽对圆面积公式的证明,被公认为世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明中. 极限是微积分的重要概念之一,导数、积分等都是基于极限而定义的. 因此,学习和掌握极限的思想与方法是十分重要的.

本节将介绍数列的极限和函数的极限.

1.2.1 数列的极限

中学阶段,我们已经学习过数列的概念,现在将进一步考察无穷数列$\{a_n\}$当自变量 n 无限增大时,a_n 的变化趋势. 先看下面几个数列.

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \qquad a_n=\frac{1}{2^n};$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots \qquad a_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n};$$

$$0,1,0,1,\cdots\frac{1+(-1)^n}{2},\cdots \qquad a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}.$$

通过观察数列的变化趋势，可以看出数列的变化趋势有两种：一种是当 n 无限增大时，数列 a_n 无限接近于一个确定的数；另一种是随着 n 的无限增大，数列 a_n 不能接近于一个常数. 归纳上述数列的变化趋势，我们给出下面的定义.

定义 1 如果当 n 无限增大时，数列 a_n 能够无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作数列 a_n 的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to A$.

从而，上述几个数列可记为：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

数列 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 的极限不存在.

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\frac{2}{n}$；(2) $a_n=2$；(3) $a_n=1+\frac{1}{n}$；(4) $a_n=(-1)^n\frac{1}{3^n}$.

解 观察可得：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}2=2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=0.$$

结论：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

1.2.2 函数的极限

函数的极限主要研究以下两种情形.

(1) 当自变量 $x\to\infty$（包括 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$），即 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的极限；

(2) 当自变量 $x\to x_0$（包括从 x_0 的左侧和 x_0 的右侧无限接近），即 x 无限趋向于一个有限值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

观察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势（见图 1-2）.

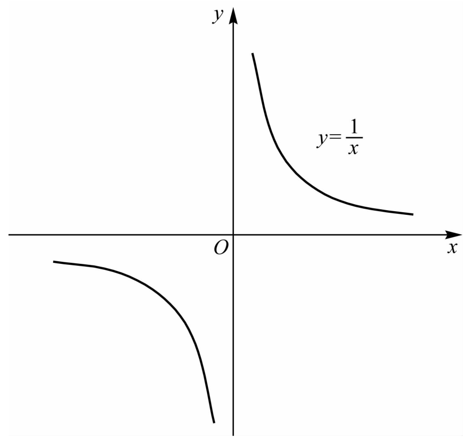


图 1-2

极限的概念（一）

由图 1-2 可以看出，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于零，对于这种当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义.

定义 2 当 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 能无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$.

在以上函数极限的定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大（记为 $x\to+\infty$），同时也取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$）. 但有时 x 的变化趋势只能或只需取这两种变化中的一种情形. 为此，定义 2 中的 $x\to\infty$ 可以换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的情形.

例 2 求下列函数极限.

(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$； (2) $y=2^x$； (3) $y=\arctan x$.

解 通过作图分析（如图 1-3 和图 1-4 所示）可得：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$；

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般地，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

显然，数列极限是函数当 $x\to+\infty$ 时的特殊情形.

极限的概念（二）

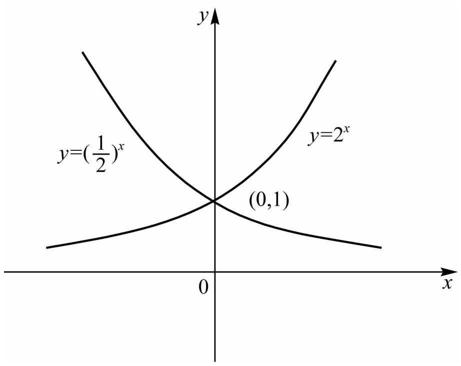


图 1-3

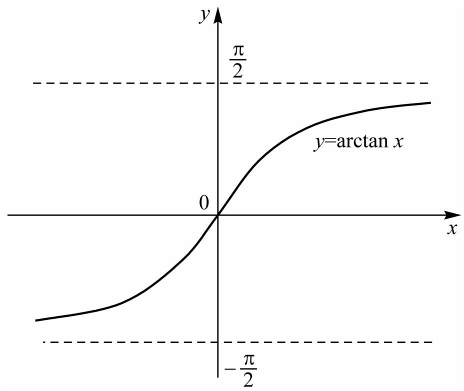


图 1-4

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

对于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x+1$，观察当 $x\to 3$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势（见图 1-5）.

极限的概念（三）

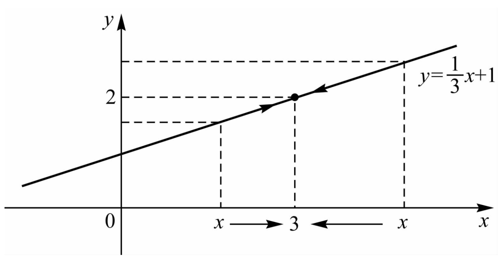


图 1-5

由图 1-5 不难发现，当 x 从 3 的左右两侧越来越接近 3 时，$f(x)$ 的值就越来越接近 2. 从而给出下面的定义.

定义 3　当 x 无限接近于 x_0（x 可以不等于 x_0）时，如果函数 $f(x)$ 能无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to A$.

由图 1-5，可以看出，当 $x\to 3$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x+1$ 的极限为 2，可记为

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3}x+1\right)=2.$$

例 3　求函数 $y=f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的极限.

解　函数的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

由图 1-6 可以看出，当 $x\to\frac{1}{2}$ 时，$f(x)\to 2$，从而 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2$.

注意 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，与函数在这点是否有定义无关.

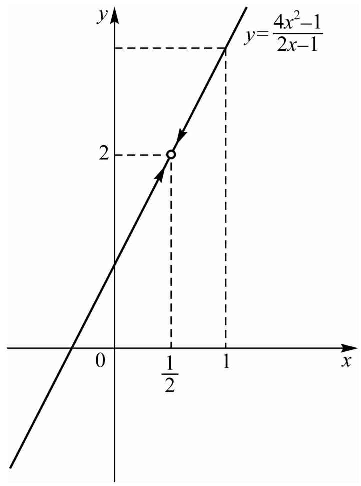


图 1-6

由定义 3 可以得出以下结论.

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0;\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1;\quad \lim_{x\to x_0}C=C;\quad \lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

上面讨论的 $x\to x_0$ 指的是自变量 x 从 x_0 的左侧和右侧无限接近于 x_0，但有时只需知道 x 仅从 x_0 的左侧($x<x_0$)或仅从 x_0 的右侧($x>x_0$)趋于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势. 这就是左极限和右极限的概念.

定义 4 当 x 从 x_0 的左侧无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 能无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的**左极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

当 x 从 x_0 的右侧无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 能无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的**右极限**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

左、右极限又称为**单侧极限**.

一般地，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 1\\ x-2, & x>1\end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时的极限.

解 作该函数的图形,如图 1-7 所示. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x^2)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-2)=-1,$$

即
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=-1,$$

所以
$$\lim_{x\to 1}f(x)=-1.$$

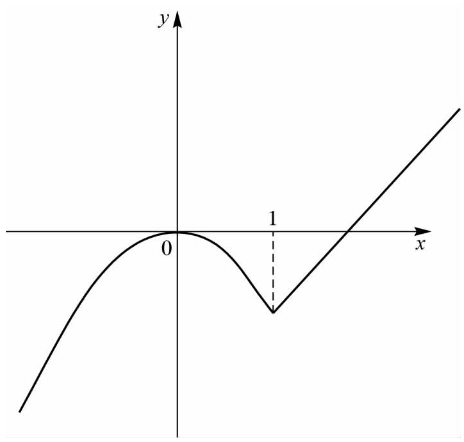


图 1-7

1.2.3 无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量

在实际问题中,经常遇到极限为零的变量. 例如,单摆离开铅直位置而摆动,由于空气阻力和机械摩擦力的作用,单摆的振幅随着时间的增加而逐渐减小并趋于零. 又如,电容器放电时,其电压随着时间的增加而逐渐减小并趋于零.

定义 5 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限为零,那么函数 $f(x)$ 就叫作当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,简称**无穷小**.

例如,当 $x\to 1$ 时,$x-1$ 是无穷小;当 $x\to\infty$时,$\frac{1}{x}$是无穷小.

注意 (1)无穷小是极限为零的变量. 任何一个绝对值很小的常数(如 0.000 001 或 $-0.000\ 001$)都不是无穷小,但常数中的“0”可以看成无穷小,因为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}0=0$.

(2)说一个函数 $f(x)$ 是无穷小,必须指明其自变量的变化趋势. 例如,函数 $x-1$ 当 $x\to 1$ 时是无穷小;当 x 趋于其他数值时,$x-1$ 就不是无穷小.

2. 无穷大量

定义 6 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么函数 $f(x)$ 就叫作当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**.

注意 (1)若在 x 的变化过程中，$f(x)$ 是无穷大，称 $f(x)$ 的极限不存在；但为了便于叙述函数的这一变化特征，也称“函数的极限为无穷大”，并记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$（$+\infty$ 或 $-\infty$）.

(2)无穷大也是变量，任何一个绝对值很大的常数（如 10^{10}，-10^{100}）都不是无穷大.

(3)说一个函数是无穷大，必须指明其自变量的变化趋势. 例如，函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时为无穷大；当 x 趋于其他数值时，$\frac{1}{x}$ 就不是无穷大.

3. 无穷小与无穷大的关系

定理 1 在同一自变量的变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例 6 下列函数当自变量怎样变化时是无穷大？

(1) $y=\frac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\ln x$.

解 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，即当 $x\to 1$ 时，$x-1$ 为无穷小，所以，$\frac{1}{x-1}$ 为 $x\to 1$ 时的无穷大；

(2)因为当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x\to+\infty$；当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x\to-\infty$. 所以，当 $x\to+\infty$ 及 $x\to 0^+$ 时，$\ln x$ 都是无穷大.

习题 1-2

1. 判断下列数列是否具有极限，若有，写出极限值.

(1) $0,\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\cdots,\frac{n-1}{n+1},\cdots$

(2) $0.9,0.99,0.999,0.999\,9,\cdots$

(3) $-1,2,-3,\cdots,(-1)^n n,\cdots$

2. 说明下列极限不存在的原因.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x<1 \\ 2x+1, & x\geqslant 1 \end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x$；　　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x^2-1}$.

1.3　极限的计算

1.3.1　极限的四则运算法则

对于比较复杂的函数极限，就需要用到极限的运算法则来进行计算.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]\cdot[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]=A\cdot B$.

法则 3　$\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$（$C$ 为常数）.

法则 4　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

注意　(1)在两个函数的极限都存在的前提条件下，才能进行极限的四则运算.

(2)法则 1 和法则 2 可以推广到任意有限个具有极限的函数的情形.

(3)上述法则对于 $x\to\infty$ 的情形也是成立的.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

解　因为当 $x\to 3$ 时，$(x-3)\to 0$，所以不能直接应用法则 4；但在 $x\to 3$ 的过程中，$x-3\neq 0$，即 $x\neq 3$. 因此

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-1)=2.$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解　分子分母同除以 x^3，然后再取极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=\frac{3-4\times 0+2\times 0}{7+5\times 0-3\times 0}=\frac{3}{7}.$$

用同样的方法，可得如下结论.

当 $a_0\neq0, b_0\neq0$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$.

解 因为 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\times(1-0)=\frac{1}{2}.$$

例 4 已知数列 $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \cdots, \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \cdots$（无穷递缩等比数列），求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

一般地，因为 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}$，把它称为无穷递缩等比数列的和.

1.3.2 两个重要极限

1. 重要极限一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

通过函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像（见图 1-8），可以直观地观察到当 $x\to0$ 时的函数值逐渐趋于 1.

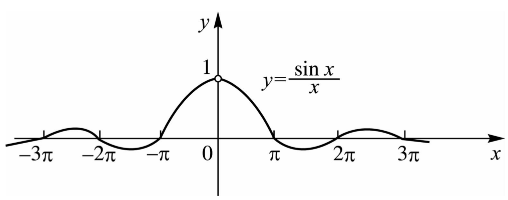


图 1-8

公式的形式可写成 $\lim\limits_{\square\to0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$，其中"□"代表相同的变量或表达式.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)$.

令 $2x=t$，则 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，故

$$\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2\times 1=2.$$

例 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

例 7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

2. 重要极限二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

公式中，e 是一个无理数，它的值是 2.718 281 828 459 045….

在 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 中，令 $\dfrac{1}{x}=z$，则当 $x\to\infty$ 时，$z\to 0$，于是其极限形式又可写为

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

公式的形式也可写成 $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$，其中“□”代表相同的变量或表达式.

例 8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\mathrm{e}^2$.

例 9 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{4x+3}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x+3}&=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^2\cdot\left(1+\frac{1}{2x}\right)^3\right\}\\&=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^3\\&=\mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

第二个重要极限在经济学中有重要的实用背景，即连续复利的计算.

假设 P_0 为本金，年利率为 r，那么第一年年末的利息为 $P_0 r$，本利的和为 $P_0+P_0 r$（用 P_1 表示），将 $P_1=P_0+P_0 r$ 作为第二年的本金；到第二年年末，就有本利总和 $P_2=P_0(1+r)^2$，本金年年增加，利息也逐年增多，到了第 n 年年末，就有

$$P_n=P_0(1+r)^n \tag{1-1}$$

如果每月将利息加入本金一次，则第一年年末的本利和为

$$P_1=P_0\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} \tag{1-2}$$

假设存款本金为 100 元，年利率为 0.05，则用式(1-1)可求得第一年年末的本利和为 105 元；若按式(1-2)计算，则第一年年末的本利和为 105.12 元. 显然，利息加入本金一次的时间越短，利息就越多. 那么，当这个时间“无穷短”时，利息会无限增多吗？

假设在这一年中，利息是每一瞬间（每一年有 n 个瞬间）加入本金一次，式(1-2)中的 12 就变成 n，就得到

$$P_1=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} \tag{1-3}$$

为了便于计算，假设$\frac{r}{n}=\frac{1}{m}$，就得到 $n=mr$，这样式(1-3)就变为

$$P_1=P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}=P_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r} \tag{1-4}$$

这就归结为求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ 的值，即第二个重要极限，其值为 e. 所以，式(1-4)变为 $P_1=P_0 e^r$.

从上面的计算可以看出，年利率一定，分期复利，无论期数怎样增加，本利和并不会无限增大，而是有一个“极限值”永远超越不了. 1683 年，瑞士数学家雅各布·伯努利在研究连续复利时，意识到这个问题需要用极限的方式来解决.

1.3.3 无穷小的性质与无穷小的比较

1. 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和(或差)是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例 11 求$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$的极限不存在，所以不能应用极限的运算法则，但$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\frac{1}{x}$是有界函数，而$\lim\limits_{x\to 0} x=0$，根据无穷小的性质 2 可得$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

同理$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

2. 无穷小的比较

在无穷小的性质中，已经知道两个无穷小的和、差、积仍为无穷小，那么两个无穷小的商是否是无穷小呢？

例如，当 $x\to 0$ 时，$2x$，$3x$，x^2 都是无穷小，然而

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty.$$

两个无穷小的商的各种极限情况，反映了分子、分母趋于零的“快慢”程度的不同. 就上面的例子而言，当 $x\to 0$ 时 $x^2\to 0$ 要比 $2x\to 0$“快些”，反过来，$3x\to 0$ 要比 $x^2\to 0$“慢些”，而 $2x\to 0$ 和 $3x\to 0$ 的“快慢”相仿.

为了对无穷小趋于零的速度有一个定性的、准确的描述，下面引出“无穷小的阶”的概念.

定义 设 α 与 β 是同一自变量的变化过程中的两个无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β **较高阶的无穷小**；

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β **较低阶的无穷小**；

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称 α 与 β 是**同阶无穷小**.

特别地，当 $C=1$ 时，即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ 时，称 α 与 β 是**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta$.

由上面的定义可知，当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 $3x$ 是同阶无穷小，x^2 是比 $2x$ 较高阶的无穷小，$3x$ 是比 x^2 较低阶的无穷小.

3. 等价无穷小的性质及应用

定理(等价无穷小代换定理) 如果在自变量 x 的某一变化过程 p 中，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{p}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在(或为$\infty$)，则$\lim\limits_{p}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{p}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

在求两个无穷小的商的极限时，分子、分母可分别用它们的等价无穷小代替，以简化极限计算过程.

利用等价无穷小的定义可以证明，当 $x\to 0$ 时，有下面一些常用的等价无穷小.

$$\sin x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \tan x\sim x,\quad \sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2};$$

$$\arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x.$$

例 12 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$.

解 因为当$x\to 0$时，$\tan 3x\sim 3x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^2 x}{1-\cos x}$.

解 因为当$x\to 0$时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}2x=0.$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 将分式先变形再作等价无穷小代换，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

在例14中，如果一开始就用$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$对原式作无穷小代换，则将导致结果错误结果，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$是错误的(这是因为当$x\to 0$时，$\tan x-\sin x$与$x-x$不等价).

注意 利用等价无穷小代换定理求极限时，只有当分子或分母为函数的连乘积时，各个乘积因式才可以分别用它们的等价无穷小代换，而对于函数的和或差时，通常不允许分别用等价无穷小代换，否则将会导致结果错误.

习题 1-3

1. 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{1+n^2}$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)$；

(3)$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$；

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-2}{x^4+x^2-1}$；

(6)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$；　　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$；

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{2-x}\right)^{x}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 4x}{8(1-\cos^2 x)}$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　　(18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{\ln x}$.

2. 数列 1，1，2，3，5，8，13，21，…称为斐波那契数列，它在现实中的出现充满奇妙. 其各项有下面的递推关系：$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 称为“黄金比率”，这一比率用于建筑中可使建筑增加美感. 试求出“黄金比率”.

3. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是较高阶的无穷小？

4. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是否同阶？是否等价？

1.4　函数的连续性

在很多实际问题中，变量的变化常常是连续不断的. 例如，气温随时间的变化而变化，当时间的改变很小时，气温的改变也很小，这就是说，气温是连续变化的. 再如，植物的生长、河水的流动、金属的热胀冷缩等，都是连续变化的. 这些连续变化的现象反映在数学上就是函数的连续性，它是微积分的又一重要概念.

1.4.1　函数的增量

定义 1　设变量 u 从初值 u_1 改变到终值 u_2，终值与初值之差 u_2-u_1 称为变量 u 的**增量**，记为 Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

注意　Δu 可正可负（当 u 由小变大时，Δu 为正；当 u 由大变小时，Δu 为负）.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处及其近旁有定义，当自变量 x 由 x_0（初值）变化到 $x_0+\Delta x$（终值），有增量 Δx 时，函数 $y=f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$（初值）变到 $f(x_0+\Delta x)$（终值），相应的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如图 1-9 所示.

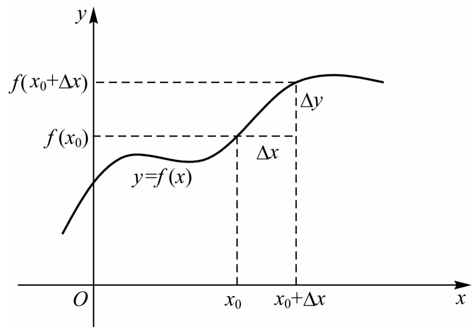


图 1-9

例 1 设 $y=f(x)=3x^2-1$，求适合下列条件的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy.

(1)当 x 由 1 变到 1.5；

(2)当 x 由 1 变到 0.5；

(3)当 x 由 1 变到 $1+\Delta x$.

解 (1)$\Delta x=1.5-1=0.5$，

$\Delta y=f(1.5)-f(1)=5.75-2=3.75$；

(2)$\Delta x=0.5-1=-0.5$，

$\Delta y=f(0.5)-f(1)=-0.25-2=-2.25$；

(3)$\Delta x=(1+\Delta x)-1=\Delta x$，

$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=[3(1+\Delta x)^2-1]-2=6\Delta x+3(\Delta x)^2$.

1.4.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的连续性

函数在 x_0 处连续

首先观察图 1-10 和图 1-11.

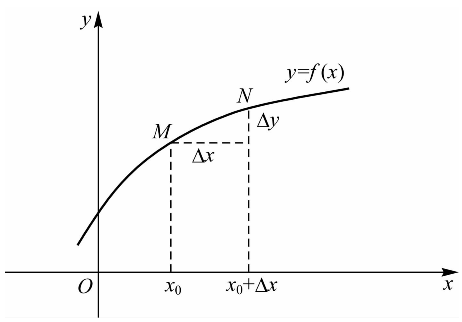


图 1-10

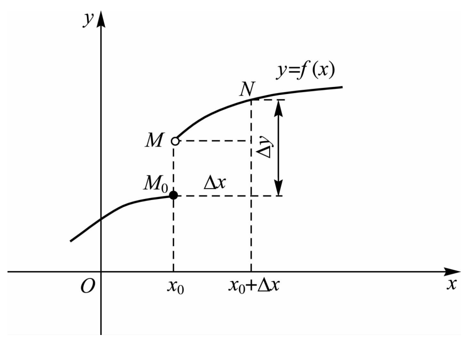


图 1-11

函数在 x_0 处不连续

图 1-10 的特征是：当 Δx 很小时，Δy 也很小，即当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$.

图 1-11 的特征是：当 Δx 很小时，Δy 也很小；但是当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 并不能够无限趋于

零，而是无限趋近于一个非零常数(线段 MM_0 的长度).

下面给出函数在点 x_0 处连续的定义.

定义 2 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其近旁有定义. 如果当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋于 0 时，函数 y 相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于 0，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称函数 $y=f(x)$在**点 x_0 处连续.**

函数在 x_0 点连续性(定义 2)

例 2 用定义 2 证明函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证明 因为函数 $y=3x^2-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以函数在点 $x=1$ 处及其近旁有定义.

由例 1 知 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处自变量的增量为 Δx 时相应的函数的增量为

$$\Delta y=6\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6\Delta x+3(\Delta x)^2)=0$. 所以，根据定义 2 可知函数 $y=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

若令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，如图 1-12 所示. 那么，$\Delta x\to 0$，即 $x\to x_0$；$\Delta y\to 0$，即 $f(x)\to f(x_0)$；$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

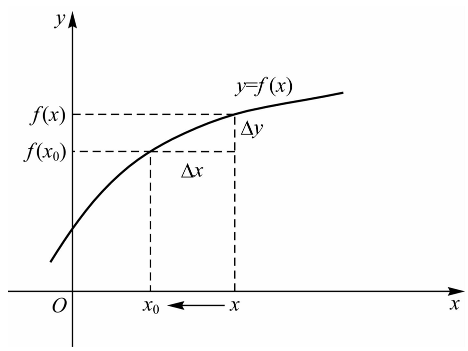


图 1-12

从而得到下面的定义.

定义 3 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其近旁有定义，如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在**点 x_0 处连续.**

例 3 用定义 3 证明函数 $y=f(x)=3x^2-1$ 在点 $x=1$ 处连续.

证明 因为函数 $y=f(x)=3x^2-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以它在点 $x=1$ 处及其近旁有定义.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-1)=2=f(1)$，所以，由连续的定义 3 可知，函数 $y=3x^2-1$

在点 $x=1$ 处连续.

注意 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件.

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处及其近旁有定义.

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3)极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 等于函数值 $f(x_0)$.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性,并画出它的图形.

解 作出该函数的图形,如图 1-13 所示. 由题意可知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处及其近旁有定义.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2-x)=2,$$

所以,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在. 从而 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

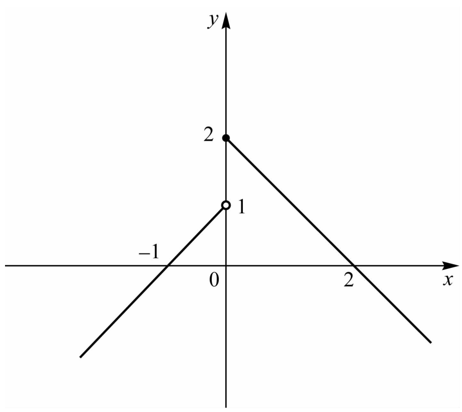


图 1-13

1.4.3 函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性

1. 左连续、右连续的概念

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 内有定义,如果左极限 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且等于 $f(b)$,即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,那么称函数 $f(x)$ 在点 b 处**左连续**.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 内有定义,如果右极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在且等于 $f(a)$,即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,那么称函数 $f(x)$ 在点 a 处**右连续**.

2. 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的连续性

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有定义且在每一点处都连续,则称函数 $f(x)$ 在**开区间**

(a,b)内连续. (a,b)称为 $f(x)$的**连续区间.**

3. 函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的连续性

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义,在(a,b)内连续,且在右端点 b 处左连续,在左端点 a 处右连续,即 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,那么就称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线.

1.4.4　函数的间断点

先考察下面三个函数在点 $x=1$ 处的连续性.

(1)函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,在点 $x=1$ 处没有定义,因此 $f(x)$在点 $x=1$ 处不连续,如图 1-14 所示.

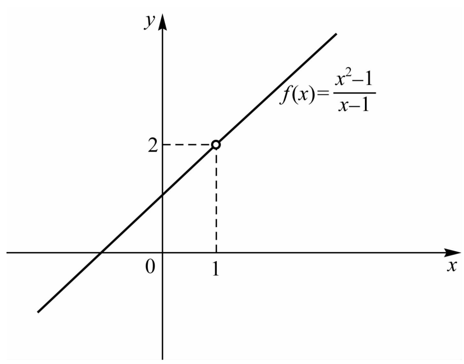


图 1-14

(2)函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1 \\ 0, & x=1 \\ x-1, & x<1 \end{cases}$ 虽在点 $x=1$ 处及其近旁有定义,但由于$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在,故$f(x)$在点 $x=1$ 处不连续,如图 1-15 所示.

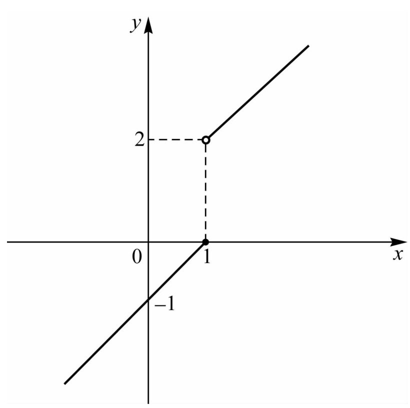


图 1-15

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 虽然在点 $x=1$ 处及其近旁有定义，且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$，但是 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$，故 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续，如图 1-16 所示.

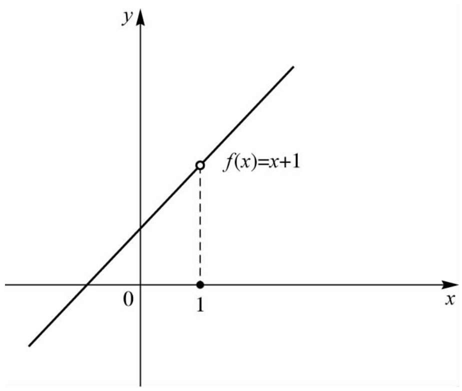


图 1-16

虽然以上三个函数在点 $x=1$ 处都不连续，但是产生不连续的原因是不一样的. 一般来说，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一.

(1) $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的近旁有定义，但在点 $x=x_0$ 处没有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 处及其近旁有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续. 把点 x_0 叫作函数 $f(x)$ 的**不连续点**或**间断点**. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的左右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**，除此以外的间断点称为**第二类间断点**. 当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 的间断点称为**跳跃间断点**，将 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的间断点称为**可去间断点**.

例 5 求下列函数的间断点.

(1) $y=\tan x$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$.

解 (1)函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以点 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 是函数 $y=\tan x$ 的间断点. $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，一般将这种间断点称为**无穷间断点**. 无穷间断点

是第二类间断点.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处及其近旁有定义,但 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$,即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在. 所以点 $x=0$ 是函数的无穷间断点.

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处有定义,且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,但 $f(1)=2$,即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$. 所以,点 $x=1$ 是函数的间断点,是可去间断点.

1.4.5 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内每一点处都是连续的.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则这两个函数的和 $f(x)+g(x)$,差 $f(x)-g(x)$,积 $f(x)\cdot g(x)$,商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)在点 x_0 处也连续.

定理 2 设函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续,函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

由以上定理可知,一切初等函数在其定义域内都是连续的. 在确定分段函数的连续性时,要着重讨论分界点处的连续性.

关于初等函数的连续性,有以下两个重要结论.

(1)多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续;

(2)分式函数 $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$ 除在分母为 0 的点处不连续外,在其他点处都连续.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义,如果 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是 $f(x)$ 定义区间内的点,那么求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,只要求 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值就可以了,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$.

解 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,这是一个初等函数,它的定义域为 $[-1,1]$,而 $x=0$ 在该区间内,所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=f(0)=1.$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)$.

解 设函数 $f(x)=\ln(\sin x)$，它的一个定义区间为$(0,\pi)$，而 $x=\frac{\pi}{2}$在该区间内. 所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

1.4.6 闭区间上连续函数的性质

1. 最大值与最小值性质

定理 3 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则它在这个区间上一定有最大值与最小值. 如图 1-17 所示，函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在点 ξ_1 和端点 b 处取得最大值 M，在点 ξ_2 处取得最小值 m.

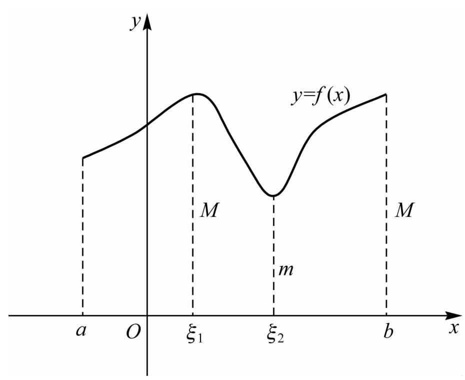


图 1-17

注意 对于在开区间内连续或在闭区间上有间断点的函数，其最大值与最小值不一定存在.

例如，函数 $y=x$ 在开区间(a,b)内是连续的，而该函数在开区间(a,b)内既无最大值，又无最小值，如图 1-18(a)所示.

又如，函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x=1\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 在闭区间$[0,2]$上有间断点 $x=1$，这时函数在闭区间$[0,2]$上既无最大值，又无最小值，如图 1-18(b)所示.

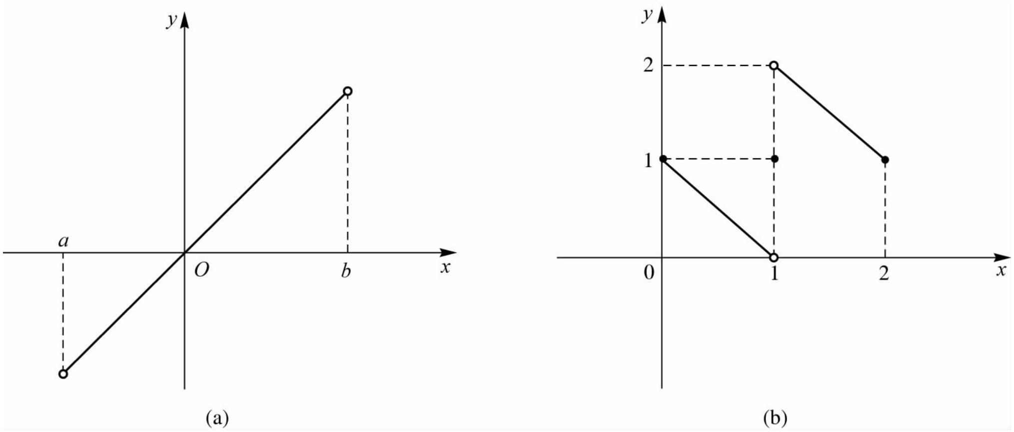


图 1-18

2. 介值定理

定理 4 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,m 和 M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值,则对介于 m 和 M 之间的任一实数 C(即 $m<C<M$),至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$. 如图 1-19 所示.

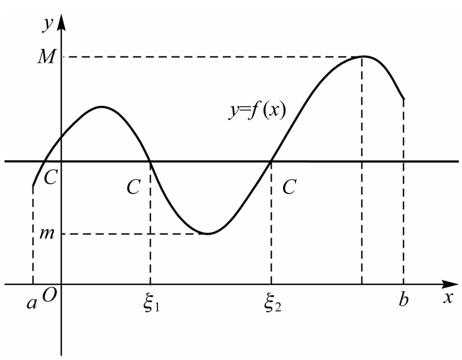


图 1-19

推论 如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

在图 1-20 中,连续曲线

$$y=f(x),f(a)<0,f(b)>0,$$

与 x 轴相交于点 ξ_1,ξ_2,ξ_3. 所以有

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=0.$$

注意 如果函数仅在开区间(a,b)内连续或函数在闭区间$[a,b]$上有间断点,那么上述

介值定理就不一定成立.

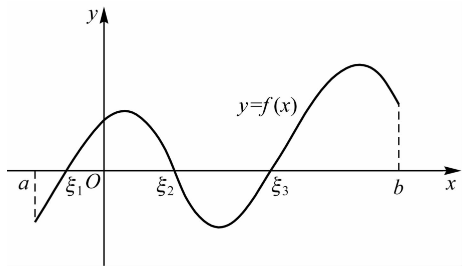


图 1-20

例如,函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在[0,2]上有间断点 $x=1$,这时 $f(0)=1$,$f(2)=3$,又若 $C=2$,则在[0,2]上找不到一点 ξ,使得 $f(\xi)=2$(见图 1-21).

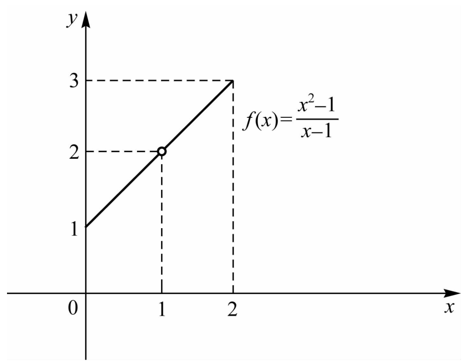


图 1-21

习题 1-4

1. 设函数 $y=f(x)=x^3-2x+5$,求适合下列条件的自变量的增量和对应的函数的增量.

(1)当 x 由 2 变到 3;

(2)当 x 由 2 变到 1;

(3)当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$;

(4)当 x 由 x_0 变到 x.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x+3, & x>1 \end{cases}$在点 $x=\dfrac{1}{2}$,$x=1$,$x=2$ 处的连续性,并画出它的图形.

3. 求下列函数的间断点.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；

(3) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$；　　(4) $y=\begin{cases}3+x^2, & x<0\\ \dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0\end{cases}$.

◎数学文化聚焦

美丽的 Koch 雪花

1904 年，瑞典科学家科克(Koch)描述了一段奇特而又有趣的事件：将一个边长为 a 的正三角形的每条边三等分，以中间三分之一为一段向外再做正三角形，小三角形在三条边上的出现使得原三角形变成了一个六角形，六角形共有 12 条边，再在这 12 条边上用与上述相同的方法，即可构造出一个新的 48 边形. 如此做下去，其边缘越来越精细，看上去就像美丽的雪花，称为 Koch 雪花，如图 1-22 所示.

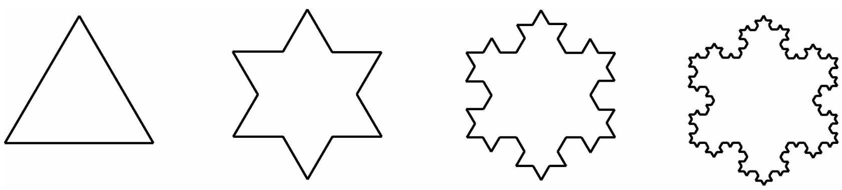


图 1-22

下面来探讨最终 Koch 雪花的面积及 Koch 曲线的周长.

分析　假设最初的正三角形的边长为 a，则其周长为 $L_1=3a$，面积为 $A_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 在生成六角形时，新生成的三角形的边长为原三角形边长的 $\dfrac{1}{3}$，新生成的三角形的面积为原三角形面积的 $\dfrac{1}{9}$. 因为共生成了三个新三角形，故总周长 $L_2=\dfrac{4}{3}L_1$，总面积 $A_2=A_1+3\cdot\dfrac{1}{9}A_1$.

同理，$L_3=\dfrac{4}{3}L_2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2L_1$，$A_3=A_2+3\left\{4\left[\left(\dfrac{1}{9}\right)^2A_1\right]\right\}$.

依次进行下去，

$$L_n=\frac{4}{3}L_{n-1}=\cdots=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}L_1;$$

$$\begin{aligned}A_n&=A_{n-1}+3\left\{4^{n-2}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1\right]\right\}=A_1+3\cdot\frac{1}{9}A_1+3\cdot4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2A_1+\cdots+3\cdot4^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}A_1\\&=A_1\left\{1+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right]\right\}=A_1\left\{1+\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\right\}.\end{aligned}$$

欲求最终 Koch 雪花的面积及 Koch 曲线的周长，可归结为 $n\to\infty$ 时，求周长 L_n 与面积 A_n 的极限.

计算可得 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A_1\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$.

结果启示 Koch 雪花的面积大小依赖于最初的正三角形的边长，而 Koch 曲线的周长却是无限增大的，表明有限的区域可以生成无限的长度，这一结果简直不可思议. 由此看到“形”被“数”描述时的一种状态.

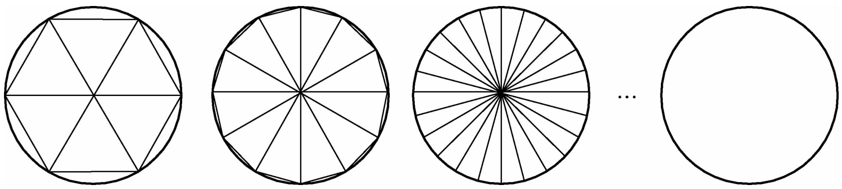
◎数学家简介

中国古代杰出数学家——刘徽

在数学中，极限的概念和思想非常重要，极限方法是微积分中的基本方法. 它是人们从有限认识无限、从近似认识精确、从量变认识质变的一种数学方法. 早在 1 000 多年前，我国古代杰出的数学家刘徽用一种叫“割圆术”的方法证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的科学方法. 这种“割圆术”所运用的数学思想正是本章中学习的极限思想，即用无限逼近的方式来研究变量的变化趋势的思想. 下面就来了解这位被称为“中国数学史上的牛顿”的伟大的数学家.

刘徽，魏晋数学家，自幼熟读《九章算术》(我国古代流传下来的最早的一部数学著作)，并对书中的问题进行了深入的研究。在钻研过程中，他发现该书中有一些错误，而且有些题目的解法过于简单，有些答案则是近似的估计，一些很巧妙的解法却没有给出理论根据，这些都对进一步的学习与研究造成阻碍. 于是，刘徽决定对《九章算术》进行校对和注释. 经过艰苦的劳动，他终于完成了这一工作，从理论上完善了中国古代的数学体系. 从此以后，《九章算术》才成为比较规范的数学教科书. 书中提出了各国数学家共同关心的一个问题：如何计算圆的面积？刘徽有一次看见石匠在加工石料，石匠把一块方石砍去四角，就变成八角形的石头，再去掉八个角又变成了十六角形，这样一凿一斧地干下去，一块方形石料就被加工成一根光滑的圆柱了，如下图所示. 刘徽因此得到启发：原来圆与直线是可以相互转化的(数学中“以直代曲”的思想). 刘徽的具体做法是：作圆的内接正六边形，再平分每条边所对的弧；作圆的内接正十二边形，用同样的方法继续作圆的内接正二十四边形，随着边数的不断增加，圆的内接正多边形越来越接近于圆，圆的内接正多边形的面积和周长越来越接近于圆的面积和周长，这就是神奇的“割圆术”. 刘徽叙述这种做法时说“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”这句话简明扼

要地概括了割圆术的实质,也就是今天所说的“极限思想”.



这里特别要说明的是,刘徽那个时候计算相当麻烦,没有很好的计算办法,也没有现在使用的这么方便的阿拉伯数字,更没有现在这么先进的计算工具(如计算器等).刘徽那个时候是用算筹来计算的.什么是算筹呢?就和现在用的筷子差不多.算筹在使用时,有所谓纵式和横式,纵式时,就是竖着把算筹摆,一根表示一,二根表示二,三根就表示三,四、五依次摆一横一竖表示六,如果出了进位,就给它拿上一根去.刘徽就用这些东西来算,不知道费了多少时间,终于把圆内接正多边形的面积一直算到了正 3 072 边形,并由此而求得了圆周率为 3.14 和 3.141 6 这两个近似数值.这个结果是当时世界上圆周率计算的最精确的数据.刘徽对自己创造的这个“割圆术”新方法非常自信,把它推广到有关圆形计算的各个方面,从而使汉代以来的数学发展大大向前推进了一步.以后到了南北朝时期,祖冲之在刘徽的这一基础上继续努力,终于使圆周率精确到了小数点以后的七位数,即 3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间.在西方,这个成绩是由法国数学家韦达于 1593 年取得的,比祖冲之要晚了 1 100 多年.后来许多人,知道祖冲之而不知道刘徽,所以很多人把这个圆周率叫作“祖率”,其实祖冲之就是在刘徽的基础上,也是用刘徽的方法,就是用割圆术,进一步细算得出结果的,它没有本质性的变化,真正革命性的计算圆周率是从刘徽开始的.

刘徽的另一项重要贡献是关于几何测量方面的.茫茫大海中耸立着一座孤岛.如何知道小岛有多高有多远.最笨的法子是准备一只小船,船上带着足够长的绳子,用绳子的长度量出到小岛的距离.这样费时费力不说,小岛的高度也不能用绳子测量.刘徽的办法是:在岸边垂直地立起两根一样长的杆子 EF 和 GH,使它们与小岛 AB 位于同一方向上,然后分别在与两杆顶 E、G 与岛尖 A 成一直线的地面 C 和 D 点作记号,量出 CF、DH、HF 以及杆 EF 的长度,即可知道岛高 AB 和岛心到第一根杆子的水平距离 BF,刘徽的公式为

$$BF=\frac{CF\cdot HF}{DH-CF}$$

$$AB=\frac{EF(DH+HF-CF)}{DH-CF}$$

学过几何的朋友可以试着证明一下这两个公式.这一方法被刘徽写进了《海岛算经》.刘徽的《九章算术注》和《海岛算经》被翻译成多国文字,向世界展示了中华民族灿烂的古代文明.

刘徽是中华民族的骄傲,是中国传统数学理论体系的奠基者之一.经他注释的《九章算术》影响、支配了中国古代数学的发展 1 000 余年,是东方数学的典范之一.他的贡献不仅对

中国古代数学发展产生了深远影响,而且在世界数学史上确立了崇高的历史地位,与古希腊数学家欧几里得(约公元前330—公元前275)的巨著《几何原本》(欧几里得最有价值的一部数学著作)所代表的古代西方数学交相辉映,历史是永远不会忘记的.