“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

大学应用数学
学习参考

主编 刘明忠 王 珏

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

大学应用数学学习参考

主编 刘明忠 王 珏

北京邮电大学出版社

大学应用数学学习参考

DAXUE YINGYONG SHUXUE XUEXI CANKAO

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高 宇
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-6909-0

定价：29.80元

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

大学应用数学
学习参考

主　编　刘明忠　王　珏
副主编　王　雪　周陈焱

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是《大学应用数学》的配套参考用书，编写顺序与《大学应用数学》的章节顺序一致。本书在编写过程中结合当前高职院校数学课程改革的实际，并充分考虑高职教育的特点，将每章内容分为“本章内容提要”“典型例题与方法归纳”“本章测试题”三个栏目。

本书既可作为高等职业院校高等数学课程的配套辅导用书，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学应用数学学习参考 / 刘明忠，王珏主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2023.5
ISBN 978-7-5635-6909-0

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①刘… ②王… Ⅲ. ①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O29

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 077330 号

策划编辑：金颖杰　　**责任编辑**：高　宇　　**封面设计**：刘文东

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：9
字　　数：186 千字
版　　次：2023 年 5 月第 1 版
印　　次：2023 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-6909-0　　定　价：29.80 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

前　　言

本书是《大学应用数学》的配套参考用书，主要面向使用该教材的学生.本书的编写顺序与《大学应用数学》的章节顺序一致，旨在帮助学生巩固课堂所学知识，掌握相关数学知识的宏观脉络及基本解题方法，真正做到学以致用.

本书在编写过程中结合当前高职院校数学课程改革的实际，并充分考虑高职教育的特点，将每章内容分为"本章内容提要""典型例题与方法归纳""本章测试题"三个栏目.

(1)"本章内容提要"列出了本章学习的知识要点及本章的重难点.

(2)"典型例题与方法归纳"选编了覆盖本章知识点的典型例题，归纳了对应的解题方法.

(3)"本章测试题"可供学生进行自我检测.

本书由刘明忠、王珏任主编，王雪、周陈焱任副主编，郭芸、黄长琴等老师参与了编写.

本书参考了国内众多院校教师编写的相关教材，在此表示感谢!

由于编者水平及经验有限，书中疏漏之处在所难免，恳请各位读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　极限与连续

本章内容提要

一、知识要点

本章主要介绍函数的概念、性质、极限，极限的运算，连续函数的定义，间断点的定义及分类，连续函数的性质及应用等内容.

1. 函数的相关知识

(1)基本初等函数. 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

①常数函数. 形如 $y=C$ 的函数叫作常数函数. 其函数值不随自变量取值的变化而改变，图像是一条平行于 x 轴的直线，定义域为全体实数.

②幂函数. 形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数叫作幂函数，如 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^{-1}$，$y=x^{\frac{1}{2}}$. 其特点是底数为变量，指数为常数. 当 $\alpha>0$，$x>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 为单调增加的函数；当 $\alpha<0$，$x>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 为单调减少的函数.

注意　根式与幂函数之间的转换为 $y=\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$，如 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 可以化为 $y=x^{\frac{2}{3}}$；幂次为正的幂函数与幂次为负的幂函数之间的转换，如 $y=x^{-3}$ 可以写成 $y=\frac{1}{x^3}$.

③指数函数. 形如 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数叫作指数函数. 其特点是底数为常数，指数为变量；其图像恒在 x 轴上方；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增加的函数，当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减少的函数.

④对数函数. 形如 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数叫作对数函数，定义域为 $\{x|x>0\}$；当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调增加的函数，当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 为单调减少的函数.

⑤三角函数. $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 统称为三角函数.

常用特殊角的三角函数值见表 1-1.

表 1-1

角　　度	三角函数值			
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	—

⑥反三角函数. 常用的反三角函数有 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$. 四类反三角函数的定义域、值域、单调性归纳如下.

$y=\arcsin x$ 的定义域为 $x\in[-1,1]$,值域为 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,单调增加.

$y=\arccos x$ 的定义域为 $x\in[-1,1]$,值域为 $y\in[0,\pi]$,单调减少.

$y=\arctan x$ 的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为 $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,单调增加.

$y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为 $y\in(0,\pi)$,单调减少.

四类反三角函数常用特殊值的反三角函数值见表 1-2 和表 1-3.

表 1-2

函　　数	特 殊 值								
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$y=\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

表 1-3

函　数	特殊值						
	0	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$y=\arctan x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
$y=\operatorname{arccot} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

(2)复合函数. 设 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$构成函数 $y=f[\varphi(x)]$,则 $y=f[\varphi(x)]$叫作复合函数.

注意　并不是任意两个函数都可以复合成复合函数,复合函数复合的条件为 $y=f(u)$的定义域和 $u=\varphi(x)$的值域交集为非空集合.

(3)初等函数. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

(4)分段函数. 在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同的式子表示的函数,称为分段函数.

(5)函数的性质. 函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性.

2. 函数极限的定义

(1)当 $x\to\infty$时函数的极限:当$|x|$无限增大时,$f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,否则称函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限不存在.

当 $x\to+\infty$时函数的极限:当沿 x 轴正向$|x|$无限增大时,$f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

当 $x\to-\infty$时函数的极限:当沿 x 轴负向$|x|$无限增大时,$f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

注意　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$,$A=B\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

因此,要判断$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$是否存在,必须先判断$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$是否存在且相等.

(2)当 $x\to x_0$ 时函数的极限:设 $f(x)$在点 x_0 近旁有定义,当 x 无限接近 x_0 时,若 $f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$,否则,称函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限不存在.

当 $x\to x_0^+$ 时函数的极限:当 x 从 x_0 的右侧无限接近 x_0 时,若 $f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

当 $x\to x_0^-$ 时函数的极限:当 x 从 x_0 的左侧无限接近 x_0 时,若 $f(x)$的值无限接近一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

注意 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=B,A=B\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.$

因此,要判断 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在,必须先判断 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$是否存在并相等.

3. 无穷小与无穷大

(1)无穷小. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$),则称函数 $f(x)$是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小(或无穷小量).

(2)无穷大. 设函数 $f(x)$在点 x_0 近旁有意义,如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,相应的函数值 $f(x)$的绝对值 $|f(x)|$无限增大,则称 $f(x)$是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大(或无穷大量).

注意 在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数是无穷小,无穷小(0 除外)的倒数是无穷大,0 是特殊的无穷小. 本章主要介绍了自变量的六种无限变化趋势,分别为 $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$. 上述无穷小与无穷大的定义对自变量其他四种无限变化趋势也是成立的.

4. 无穷小的比较

设 α 和 β 为同一变化方式下的无穷小.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 比 β 高阶(或者说 α 是比 β 高阶的无穷小量),记作 $\alpha=o(\beta)$;也说 β 比 α 低阶.

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq0$($C$ 为常数),则称 α 与 β 同阶(或者说 α 是与 β 同阶的无穷小量).

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 与 β 等价,记作 $\alpha\sim\beta$.

(4)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称 α 比 β 低阶.

5. 极限的运算法则

(1)四则运算法则. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则:

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

推论1 常数可以提到极限符号之前，即

$$\lim_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim_{x\to x_0}f(x)=cA\ (c\text{ 为常数}).$$

推论2 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n$，其中 n 为正整数.

注意 上述极限运算法则同样适用于自变量在其他五种无限变化趋势下的极限运算. 极限运算法则中函数的个数可以由两个推广到有限多个.

(2)复合函数的极限运算法则. 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而复合函数的外函数 $f(u)$ 为初等函数，且 a 在函数 $f(u)$ 的定义域内，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a).$$

6. 两个重要极限

(1)第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

第一个重要极限的特点：分子、分母的极限为零，且分母中的变量与正弦函数中的变量相同. 该极限的一般形式为

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

(2)第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

第二个重要极限的特点：底数是1加无穷小，指数是无穷大，且底数的无穷小与指数的无穷大在形式上互为倒数. 该极限的一般形式为

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\mathrm{e}\ \text{或}\ \lim_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

7. 函数在点 x_0 处连续的定义

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及近旁有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及近旁有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意 函数在点 x_0 处连续的三个条件.

(1) 函数在点 x_0 及近旁有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

结论1 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限一定存在，且极限值为 $f(x_0)$；反过来不成立.

8. 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内连续，连续函数经过四则运算与复合运算所构成的函数在其定义域内也连续，所以初等函数在其定义域内都是连续的.

结论 2　初等函数在其定义域内任一点处的极限值等于该点处的函数值.

9. 函数在点 x_0 处间断的定义

函数在点 x_0 处不连续，则称函数在点 x_0 处间断，x_0 称为函数的间断点.

注意　函数在点 x_0 处间断，只需满足下面三个条件中的任意一个条件.

(1) 函数在点 x_0 及近旁没有定义.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

10. 间断点的分类

(1)如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，且点 x_0 处左极限、右极限都存在，则称 x_0 为第一类间断点.

注意　第一类间断点根据左、右极限是否相等又分为可去间断点和跳跃间断点. 如果左极限等于右极限，则 x_0 为可去间断点；如果左极限和右极限都存在，但左极限不等于右极限，则 x_0 为跳跃间断点.

(2)如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，且点 x_0 处的左极限和右极限中至少一个不存在，则称 x_0 为第二类间断点.

结论 3　求初等函数的间断点时，只需先求出使初等函数无意义的点及该点的左、右极限，再根据该点的左、右极限判断间断点的类型；对于分段函数，求其间断点，在每一段上，视同求初等函数的间断点；在分段点处，根据函数在点 x_0 处连续的定义 2，判断函数在该点处是否连续.

11. 闭区间上连续函数的性质

(1)(最值性)若函数 $f(x)$ 在闭区间上连续，则该函数在闭区间上一定有最大值和最小值.

(2) (介值性)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，A 和 B 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间上的最小值和最大值，则对于 A 与 B 之间的任意一个实数 C，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=C$.

(3)(零点定理)若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

二、重点与难点

(1)基本初等函数的图像及性质、复合函数的概念与分解、初等函数的概念.

(2)极限的运算法则、两个重要极限、等价无穷小的代换等知识的综合应用.

(3)连续函数的定义、函数间断点的分类、连续函数的性质及其应用.

典型例题与方法归纳

例1　函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是同一个函数吗?

解　不是.虽然两个函数的定义域相同(为全体实数),但是 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的对应法则不相同,故两个函数不是同一个函数.

注意　判断两个函数是否为同一个函数应根据函数的两个要素:定义域和对应法则.当两个函数的定义域和对应法则相同时,两个函数是同一个函数;否则,不是同一个函数.

例2　求解下列各题.

(1) $f(x)=\sin x+2\cos x+3\tan x$,求 $f(0)$,$f(\pi)$,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $f(x)=\arcsin x+2\arccos x$,求 $f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(3)求 $2e^0+1\,000\ln 1+\operatorname{arccot}(-1)+4^{-\frac{1}{2}}$ 的值.

解　(1) $f(0)=\sin 0+2\cos 0+3\tan 0=0+2+0=2$;

$f(\pi)=\sin \pi+2\cos \pi+3\tan \pi=0-2+0=-2$;

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}+3\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\frac{1}{2}$.

(2) $f(0)=\arcsin 0+2\arccos 0=0+\pi=\pi$;

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}+2\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi=\frac{7}{6}\pi$.

(3) $2e^0+1\,000\ln 1+\operatorname{arccot}(-1)+4^{-\frac{1}{2}}=2+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10+3\pi}{4}$.

例3　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2+1}{3x^2-4x+3}$;　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解　(1)分子、分母的极限都为0,可通过因式分解约去分子、分母共同的零因子 $x-1$,即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(2)分子、分母的极限都为∞，可采取分子、分母同时除以它们的最高次幂 x^2，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

(3)分子、分母的极限都为∞，可采取分子、分母同时除以它们的最高次幂 x^3，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2+1}{3x^2-4x+3}=\dfrac{0+0+1}{0-0+3}=\dfrac{1}{3}$.

(5)该函数极限为“$\infty-\infty$”型未定式，可采取分子有理化，即

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

注意 分子、分母同时为多项式，计算 $x\to\infty$时的函数极限有以下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}0, & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n<m\end{cases}.$$

例 4 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$.

解 方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}\cdot\frac{3x}{\tan 3x}$$

$$=\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\lim_{3x\to 0}\frac{3x}{\tan 3x}=1\times\frac{5}{3}\times 1=\frac{5}{3}.$$

方法二：因为当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

注意 当 $x\to 0$ 时，$\sin ax\sim ax\sim\tan ax\sim\arctan ax\sim\arcsin ax\sim\ln(1+ax)\sim e^{ax}-1$，其中 a 为不等于零的常数，在求乘积或商因子的极限时，等价无穷小可以代换.

例 5 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{3x^2\sin x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x\sim\tan x$，所以有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{3x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^3}=\frac{1}{6}.$$

例 6　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$.

解　方法一：因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{x+3}{x-1}\to 1$，$x+2\to\infty$，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4(x+2)}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}}=e^4.$$

方法二：分子、分母同时除以 x，两次使用第二个重要极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}\times 1^2=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x(-1)}}$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}}=\frac{e^3}{e^{-1}}=e^4.$$

例 7　判断 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\geqslant 0\\ \cos\pi(x-1), & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的极限是否存在. 若存在，求出极限值；若不存在，请说明理由.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^0-1=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\cos\pi(0-1)=1$，因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左极限不等于右极限，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

注意　求分段函数在分段点处的左、右极限时，如果由分段点分割的两段函数在分段点处都有意义，那么把分段点代入大于该点对应的函数，所求得的函数值为分段点处的右极限；把分段点代入小于该点对应的函数，所求得的函数值为分段点处的左极限.

例 8　若函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x>0\\ \cos x, & x\leqslant 0\end{cases},$$

请判断 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是否连续.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\cos 0=1,\ f(0)=\cos 0=1,$$

所以有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=1$，由函数在某点处连续的定义知，$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant1\\ \dfrac{2\sin(x-1)}{x-1}+a, & x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，请问 a 取何值.

解　因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{2\sin(x-1)}{x-1}+a\right]=\lim_{x-1\to0}\frac{2\sin(x-1)}{x-1}+a=2+a,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,f(1)=1,$$

函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处连续，所以有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=2+a=\lim_{x\to1^+}f(x)=1=f(1),$$

即 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处连续.

例 10　证明方程 $x-\sin x=1$ 在$(0,\pi)$内至少有一个根.

证明　设函数 $f(x)=x-\sin x-1$，因为 $f(x)=x-\sin x-1$ 在$[0,\pi]$上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(\pi)=\pi-1>0$，根据零点定理，在$(0,\pi)$内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi-\sin\xi=1(0<\xi<\pi)$. 因此，方程 $x-\sin x=1$ 在$(0,\pi)$内至少有一个根.

本章测试题

1. 判断题

(　　)(1)函数 $y=\dfrac{1}{\sin x}$在实数范围内是有界函数.

(　　)(2)任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

(　　)(3)若函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续，则函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的极限一定存在.

(　　)(4)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数 $f(x)$在(a,b)内一定有最大值和最小值.

(　　)(5)若函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处间断，且函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的极限存在，则 x_0 是函数 $f(x)$的可去间断点.

2. 选择题

(1)函数 $y=2$ 的定义域是(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $\mathbf{N}$　　C. $\mathbf{Z}$　　D. 以上答案均错误

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=2$，则 $f(x_0)$(　　).

A. 不一定存在　　B. 一定存在　　C. 等于 2　　D. 不等于 2

(3)若函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处的左、右极限都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$(　　).

A. 一定存在　　B. 不一定存在

C. 等于左极限　　D. 等于右极限

(4)若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,则当 $x\to\infty$时,$f(x)-A$ 是(　　).

A. 0　　B. 单调函数　　C. 无穷小量　　D. 无穷大量

(5)下列极限正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$

(6)当 $x\to0$ 时,$1-\cos x$ 是x^2 的(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶无穷小

(7)当 $x\to0$ 时,$\ln(1+2x)$等价于(　　).

A. x　　B. $2x$　　C. $1+2x$　　D. $1+\ln 2x$

(8)设函数 $f(x)=\begin{cases}a, & x\geqslant0\\ \dfrac{\arctan 3x}{x}, & x<0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续,则 a 为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(9)设函数 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$,则下列说法正确的是(　　).

A. $f(x)$在点 $x=2$ 处连续　　B. $x=2$ 为 $f(x)$的第二类间断点

C. $x=2$ 为 $f(x)$的可去间断断点　　D. $x=2$ 为 $f(x)$的跳跃间断断点

(10)函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处既左连续又右连续是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

3. 填空题

(1)函数 $y=\arccos(2x)$的定义域是____________________.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2+1}=$____________________.

(3)$\cos\pi+\arccos(-1)+\arcsin(-1)+\ln\sqrt{e}+2^0=$____________________.

(4)函数 $y=\ln[\arctan(2x)]$是由____________________复合而成的.

(5)若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b\right)=0$,则常数 $a=$____________,$b=$____________.

4. 解答题

(1)求下列函数的极限.

①$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；　②$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x-1}$；

③$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)\arcsin x}{x^3}$；　④$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\tan x}$；

⑤$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　⑥$\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+\arccos x)$.

(2)指出下列函数分别是由哪些函数复合而成的.

①$y=\cos^2(3x-1)$；　②$y=\sqrt{\ln(\sin 2x)}$；

③$y=\arcsin^2(3x-1)$；　④$y=\tan(e^{\sqrt{1-x^2}})$.

(3)确定常数 a 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases} a, & x=2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续.