ISBN 978-7-5664-1707-7
定价：42.00元

『十三五』职业教育国家规划教材

数学（第2册）（第4版）

洪晓峰 张 伟◎主编

北京师范大学出版集团
安徽大学出版社

“十三五”职业教育国家规划教材

新编五年制高等职业教育教材

数学

（第4版）

（第2册）

SHUXUE

洪晓峰 张 伟◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

“十三五”职业教育国家规划教材

新编五年制高等职业教育教材

数学

（第4版）

（第2册）

SHUXUE

主　编　洪晓峰　张　伟

副主编　周文龙　吴邦昆　江万满

编　委（按姓氏笔画排序）

仲继东　朱兴伟　江万满

李兰兰　吴邦昆　张　伟

陈　傑　周文龙　洪晓峰

葛文军　程堂宝

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.第2册/洪晓峰,张伟主编.—4版.—合肥:安徽大学出版社,2018.8(2021.11重印)
新编五年制高等职业教育教材
ISBN 978-7-5664-1707-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①洪…②张… Ⅲ.①数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第199997号

数 学(第2册)(第4版) 洪晓峰 张 伟 主编

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn
印 刷:合肥远东印务有限责任公司
经 销:全国新华书店
开 本:184mm×260mm
印 张:16.25
字 数:306千字
版 次:2018年8月第4版
印 次:2021年11月第5次印刷
定 价:42.00元
ISBN 978-7-5664-1707-7

策划编辑:刘中飞 张明举 蒋 松
责任编辑:张明举
责任印制:赵明炎
装帧设计:李 军
美术编辑:李 军

编写说明

五年制高等职业教育《数学》教材自2001年(第1版)出版发行以来,得到了各级领导和专家以及教材使用学校的师生的肯定和支持.根据教学的实际情况和要求,我们曾分别于2003年和2007年对教材进行了修订.2011年我们在充分听取各方意见和广泛吸取同类、同层次教材的长处的基础上,再次对这套教材进行修订,修订后的第3版教材共分2册.第1册以初等数学为主,第2册以二次曲线、极坐标与参数方程、数列与数学归纳法、排列、组合、二项式定理以及一元函数微积分为主.特别要说明的是第3版教材的修订,教材结构变动较大,教材的质量得到进一步提高.在此衷心感谢为第3版教材的修订工作付出辛勤劳动的安徽机电职业技术学院夏国斌(第3版主编),安徽电气工程学校徐小伍,合肥铁路工程学校洪晓峰、葛文军,安徽化工学校周文龙、汪敏,安徽理工学校董安明,海军安庆市职业技术学校孙科,安徽省汽车工业学校章斌、徐黎,安徽省第一轻工业学校张永胜,安徽经济技术学院赵家成等老师.当然,我们也更不会忘记为本套教材(第1版)的出版作出重要贡献的夏国斌、韩业岚、李立众、姜绳、梁继会、刘传宝、吴方庭、辛颖、程伟、高山、吴照春、王芳玉、刘莲娣、杨兴慎、陈红、潘晓安等老师.

为了让本套教材更贴近目前五年制高职数学教学的实际,在保持第3版原有结构的基础上,我们再次对教材进行修订.本次修订对第3版的内容进行了部分增减和调整,修订后的第4版教材仍分2册,第1册内容包括:集合、充要条件、不等式,函数,任意角的三角函数,简化公式、加法定理、正弦型曲线,反三角函数、解斜三角形,平面向量,复数,空间图形,直线等.第2册内容包括:二次曲线,坐标转换与参数方程,排列、组合、概率初步,数列,极限与连续,导数与微分,导数的应用,积分及其应用,简单的微分方程等.修订后的第4版全套教材主要体现以下特色:

1. 简明易学，使用方便. 教材在内容的组织与编排方面，由浅入深、由易到难、由具体到抽象，适应学生的年龄特点和认知水平，力求紧密结合实际. 为使教材更具弹性，更趋完善，能够适应更多专业的需要，我们安排了一定数量的选学内容（“*”号标记）. 在练习的安排上，采取多梯度安排练习题的方式，教材每节内容后均配有A（基础题）、B（提高题）两套课外习题，每章后还配有复习题和单元自测题，可供学生进行单元复习和自我检测. 另外，本套教材中所有的习题、复习题及自测题都提供了参考答案，使用者可通过扫描二维码查阅.

2. 紧密结合实际. 注重从生活中的实际问题引入数学概念，利用数学知识解决实际问题.

3. 体现时代特征. 一方面，强调对计算器的使用，将相关知识点与计算器的使用相结合；另一方面，将一些教学内容与常用计算机软件有机结合起来，利用软件的强大功能，方便教师的教学，增强学生对数学的理解，提高教学效率.

4. 拓宽视野. 每章后附有阅读材料，内容涉及数学史及相关知识应用案例.

本套教材主要适用于五年制高等职业教育数学课程，同时也可以作为中等职业教育数学课程学习的辅助用书. 教材必学部分的教学时数约为200学时.

在教材的编写、修订过程中，我们得到了有关部门、各有关学校及安徽大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的学识和水平，教材中出现的错误、疏漏和不完善之处在所难免，敬请使用本教材的师生和同行予以指正.

编　者

2018 年 7 月

目 录

第 10 章
二次曲线

第 11 章
*坐标转换与参数方程

第 12 章
排列、组合与概率初步

第 13 章

数列

第 14 章

极限与连续

第 15 章

导数与微分

第 16 章

导数的应用

第 17 章

*积分及其应用

第 18 章
*简单的微分方程

第 10 章

二次曲线

在生产实际和科学研究中，我们经常会遇到各种形状的曲线. 例如，机械传动中用到的齿轮外形是圆，油罐车上的油罐的横截面是椭圆，某些通风塔的通风筒的剖面是双曲线，物体平抛时运行的轨迹是抛物线等. 本章将建立曲线与方程的概念，并讨论圆、椭圆、双曲线、抛物线等二次曲线的定义、方程、图像和性质.

10.1　圆

一、曲线与方程

我们首先来研究平面曲线和含有 x,y 的方程之间的关系.

如图 10-1 所示为以原点为圆心，半径为 5 的圆. 容易看出，圆上任意一点 $M(x,y)$ 到圆心的距离都等于 5，于是点 $M(x,y)$ 所适合的条件可用方程

$$\sqrt{x^2+y^2}=5$$

或

$$x^2+y^2=25$$

来表示. 容易检验，凡圆周上的点，它的坐标都满足这个方程；反之，满足这个方程的点都在这个圆上.

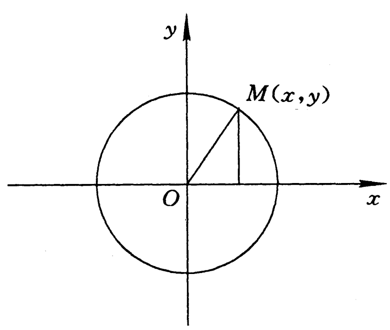

图 10-1

对于曲线与方程之间的对应关系，给出下面的定义.

定义　如果一条曲线与一个含 x,y 的二元方程 $F(x,y)=0$ 之间同时具有如下的对应关系：

(1)曲线上所有的点的坐标都满足这个方程；

(2)以这个方程的解为坐标的点，都在这条曲线上.

那么，这个方程称为这条**曲线的方程**，这条曲线称为这个**方程的曲线（图像）**.

方程中所含的 x，y 就是点的坐标(x,y)，由于它们随着点的移动而改变，通常又被称为**流动坐标**. 因此，曲线可以看成是满足一定条件的动点的轨迹.

上述曲线与方程之间的对应关系和第 9 章中直线与方程之间的对应关系是一致的. 事实上，直线可以看成是曲线的特殊情况. 通过建立曲线与方程之间的这种对应关系，我们可用代数的方法来研究几何问题.

例 1 判定 $A(3,-4)$和 $B(4,5)$两点是否在曲线 $x^2+y^2=25$ 上.

解 将点 $A(3,-4)$坐标代入所给方程，得

$$3^2+(-4)^2=25.$$

也就是说，点 A 的坐标满足所给方程，所以点 $A(3,-4)$在曲线 $x^2+y^2=25$ 上.

将点 $B(4,5)$的坐标代入所给方程，得

$$4^2+5^2\neq 25.$$

也就是说，点 B 的坐标不满足所给方程，所以点 $B(4,5)$不在曲线 $x^2+y^2=25$ 上.

二、圆的方程

由平面几何知道，在平面上与一定点距离等于定长的动点的轨迹称为**圆**，这个定点称为**圆心**，定长称为**半径**.

下面来求以 $C(h,k)$为圆心，r 为半径的圆的方程.

设 $M(x,y)$是圆上的任意一点（如图 10-2 所示），由已知条件，得

$$|MC|=r.$$

由两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r.$$

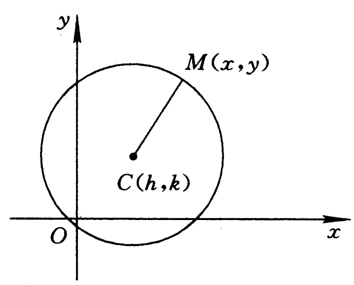

图 10-2

两边平方，得

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2} \qquad (10\text{-}1)$$

方程(10-1)称为**圆的标准方程**，它表示以 $C(h,k)$为圆心，r 为半径的圆.

当 $h=k=0$ 时，圆的方程就是

$$\boxed{x^2+y^2=r^2} \qquad (10\text{-}2)$$

我们称方程(10-2)为以原点为圆心，r 为半径的圆的方程.

把圆的标准方程展开并移项，得

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0.$$

不妨设 $-2h=D$，$-2k=E$，$h^2+k^2-r^2=F$，代入上式，得

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0} \tag{10-3}$$

这个方程称为**圆的一般方程**.

由方程(10-3)我们看到，圆的方程是一个含有流动坐标 x 和 y 的二元二次方程，其特点为

(1)x^2 与 y^2 项的系数相等；

(2)不含 xy 项.

将方程(10-3)配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示以$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$为圆心，以$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$为半径的圆.

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示一个坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$的点，称为点圆.

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，在实平面内原方程的图形不存在，方程表示一个虚圆.

例 2　判定方程 $2x^2+2y^2+2x-2y-5=0$ 所表示的曲线形状.

解　原方程两边各除以 2，得

$$x^2+y^2+x-y-\frac{5}{2}=0.$$

将方程进行配方，得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=3.$$

故原方程表示一个圆，圆心为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，半径为$\sqrt{3}$.

例 3　求以点 $C(3,-5)$ 为圆心，以 6 为半径的圆的方程，并确定点 $P_1(4,-3)$、$P_2(3,1)$、$P_3(-3,-4)$ 与这个圆的位置关系.

解　因为 $h=3$，$k=-5$，$r=6$，所以要求的圆的标准方程为

$$(x-3)^2+(y+5)^2=36.$$

因为 $|P_1C|=\sqrt{(4-3)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{5}<6$，所以点 $P_1(4,-3)$ 在圆内；

因为 $|P_2C|=\sqrt{(3-3)^2+(1+5)^2}=6$，所以点 $P_2(3,1)$ 在圆周上；

因为 $|P_3C|=\sqrt{(-3-3)^2+(-4+5)^2}=\sqrt{37}>6$，所以点 $P_3(-3,-4)$ 在圆外.

例 4 根据下面所给的条件，分别求出圆的方程：

(1)以点 $(-2,5)$ 为圆心，并且过点 $(3,-7)$；

(2)设点 $A(4,3)$、$B(6,-1)$，以线段 AB 为直径；

(3)以 $C(1,3)$ 为圆心，并且与直线 $3x-4y-16=0$ 相切.

解 (1)由于点 $(-2,5)$ 与点 $(3,-7)$ 之间的距离就是该圆的半径 r，由两点间的距离公式得

$$r=\sqrt{(3+2)^2+(-7-5)^2}=13,$$

故所求的圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-5)^2=169.$$

(2)设所求圆的圆心为点 C，由题意知点 C 为线段 AB 的中点，根据中点公式得点 C 的坐标为 $\left(\frac{4+6}{2},\frac{3-1}{2}\right)$，即 $C(5,1)$. 半径 r 为线段 AB 的长度的一半，即

$$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(6-4)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{5}.$$

故所求的圆的方程为

$$(x-5)^2+(y-1)^2=5.$$

(3)因为圆 C 和直线 $3x-4y-16=0$ 相切，所以半径 r 等于圆心 C 到这条直线的距离，根据点到直线的距离公式，得

$$r=\frac{|3\times1-4\times3-16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5.$$

因此，所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-3)^2=25.$$

例 5 一圆经过点 $B(-1,3)$，且与 x 轴相切于点 $A(2,0)$. 求这个圆的方程.

解 设这个圆的方程为 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，如图 10-3 所示，设圆心为 C，连接 AC.

因为 $AC\perp x$ 轴，

所以 $h=2$.

又由于点 $A(2,0)$ 和 $B(-1,3)$ 都在圆上，所以

$$\begin{cases}(2-h)^2+(0-k)^2=r^2,\\(-1-h)^2+(3-k)^2=r^2.\end{cases}$$

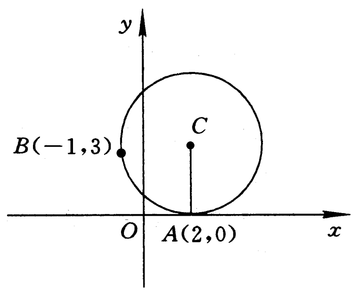

图 10-3

解这个方程组得

$$k=3,\ r=3.$$

即所求的方程为

$$(x-2)^2+(y-3)^2=3^2$$

或

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0.$$

例 6　某施工单位砌圆拱时，需要制作如图 10-4 所示的木模. 设圆拱高为 1 m，跨度为 6 m，中间需要等距离地安装 5 根支撑柱子，求过点 A_3 的柱子长度（精确到 0.1 m）.

解　以线段 AB 的中点为坐标原点，建立直角坐标系如图 10-4 所示. 由题意知，$A(-3,0)$、$B(3,0)$、$C(0,1)$、$A_3(1,0)$，点 G 的横坐标为 1，求过点 A_3 的柱子长度，相当于求点 G 的纵坐标.

设所求圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，因点 A，B，C 在圆上，所以它们的坐标是方程的解. 将点 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，$C(0,1)$ 分别代入圆的一般方程，得三元一次方程组

$$\begin{cases}9-3D+F=0,\\9+3D+F=0,\\1+E+F=0,\end{cases}$$

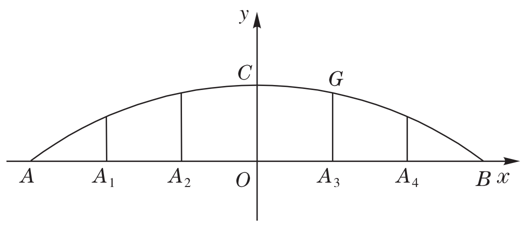

图 10-4

解得

$$\begin{cases}D=0,\\E=8,\\F=-9.\end{cases}$$

故所求圆的一般方程为

$$x^2+y^2+8y-9=0.$$

将 $x=1$，代入方程求出 y 值（取正值），得

$$y=-4+\sqrt{24}\approx 0.9\ (\mathrm{m}).$$

点 G 的纵坐标约为 0.9，即过点 A_3 的柱子长度约为 0.9 m.

求两条曲线交点坐标，也就是解由两条曲线方程所组成的方程组. 方程组有几组解，两条曲线就有几个交点，并且方程组的解就是交点坐标. 方程组无解，两条曲线就没有交点.

例 7　判断直线 $l: x-y+2=0$ 与圆 $C: x^2+y^2=2$ 的位置关系.

解　解方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=2, & (1)\\x-y+2=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $$y=x+2, \tag{3}$$
将(3)式代入(1)式，整理得
$$x^2+2x+1=0.$$
解得 $x=-1$，将 $x=-1$ 代入(3)式得 $y=1$. 所以上述方程组有唯一一组解，其解为
$$\begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$$
由此可知，直线 l 和圆 C 相切，切点坐标为 $(-1,1)$.

习题 10-1(A 组)

1. 判定点 $O(0,0)$、$A(-1,4)$ 和 $B(2,3)$ 是否在曲线 $y=x^2-3x$ 上.

2. 求以点 $C(2,-1)$ 为圆心，以 1 为半径的圆的标准方程，并画出图形.

3. 根据下列圆的方程，写出圆心坐标及半径.

(1) $x^2+(y-3)^2=4$；(2) $(x+1)^2+y^2=2$；

(3) $x^2+y^2-5x+2y=0$.

4. 判断原点与圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=3$ 的位置关系.

5. 下列各方程表示什么样的图形？

(1) $x^2+y^2=0$；(2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$.

6. 求圆心为 $(1,2)$ 并与 x 轴相切的圆的方程.

7. 已知点 $A(-2,4)$ 和 $B(8,-2)$，求以线段 AB 为直径的圆的方程.

8. 求经过三点 $O(0,0)$、$A(1,1)$、$B(4,2)$ 的圆的方程，并求这个圆的圆心坐标和半径.

9. 判断直线 $x+y=2$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系.

扫一扫，获取参考答案

习题 10-1(B 组)

1. 求经过点 $(4,-2)$ 又与两坐标轴相切的圆的方程.

2. 判断两圆 $x^2+y^2=9$ 和 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=25$ 的位置关系.

3. 过点 $P(1,-1)$ 作圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的切线，求该切线方程.

4. 已知直线 $y=x+b$ 和圆 $x^2+y^2=2$，问：当 b 为何值时，直线与圆有两个交点？

扫一扫，获取参考答案

10.2　椭　　圆

一、椭圆定义和标准方程

1. 椭圆的定义

如图 10-5 所示，在平板上固定两个图钉 F_1 及 F_2，把一个没有伸缩性且绳长大于 F_1 和 F_2 距离的线的两端固定在图钉上，并且用笔尖拉紧线移动一周，则笔尖画出的曲线就是一个椭圆.

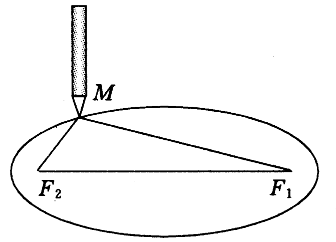

图 10-5

从上面画图过程可知，笔尖(即动点)在移动时，它到两个图钉(即定点)F_1 及 F_2 的距离之和始终保持不变.

定义　平面上与两定点 F_1，F_2 的距离之和(大于 $|F_1F_2|$)为常数的点的轨迹称为**椭圆**. 两定点 F_1 和 F_2 称为**椭圆的焦点**. 两焦点之间的距离 $|F_1F_2|$ 称为**椭圆的焦距**，用 $2c$ 表示；c 称为**半焦距**.

2. 椭圆的标准方程

以过两焦点 F_1，F_2 的直线作为 x 轴，线段 F_1F_2 的中点 O 为坐标原点，建立直角坐标系，如图 10-6 所示.

设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c$ $(c>0)$，M 与 F_1 及 F_2 的距离之和为 $2a$ $(a>c>0)$，那么焦点 F_1 的坐标为$(-c,0)$，F_2 的坐标为$(c,0)$.

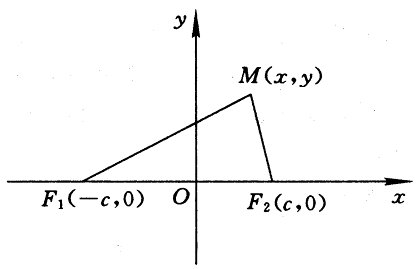

图 10-6

由椭圆的定义，得

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

根据两点间距离公式得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

化简整理得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆的定义知，$2a>2c>0$，$a>c>0$，$a^2-c^2>0$. 设 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以 a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)} \tag{10-4}$$

方程(10-4)称为**椭圆的标准方程**，它所表示的椭圆焦点在 x 轴上. 其中，$a^2=b^2+c^2$.

如果椭圆的焦点在 y 轴上，则焦点坐标是 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，如图10-7所示，设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，由椭圆的定义，得

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

由此可得

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0)} \tag{10-5}$$

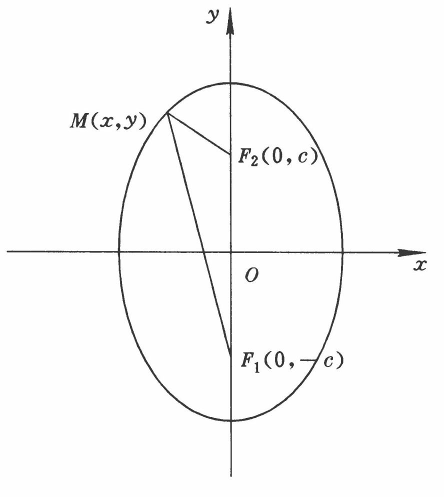

图 10-7

它也是**椭圆的标准方程**.

其中，a,b,c 之间的关系仍然是 $a^2=b^2+c^2$. 方程(10-4)与(10-5)的区别是前者的焦点在 x 轴上，后者的焦点在 y 轴上.

例 1 设椭圆的焦点为 $F_1(4,0)$，$F_2(-4,0)$，$2a=10$，求椭圆的标准方程.

解 由题意，设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由已知条件，知 $c=4$，$a=5$，于是

$$b^2=a^2-c^2=25-16=9.$$

即所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

例 2 设椭圆的焦点为 $F_1(0,4)$，$F_2(0,-4)$ 且 $b=3$，求椭圆的标准方程.

解 由题意，设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，由已知条件知

$$c=4,\ b=3.$$

于是

$$a^2=b^2+c^2=16+9=25.$$

即所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

二、椭圆的形状、画法和离心率

下面以椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$为例，讨论其形状、画法及离心率.

1. 范围

由椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

即 $$x^2\leqslant a^2,\quad y^2\leqslant b^2.$$

所以 $$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b.$$

这说明此椭圆位于直线 $x=a$，$x=-a$，$y=b$ 和 $y=-b$ 所围成的矩形方框内，如图 10-8 所示.

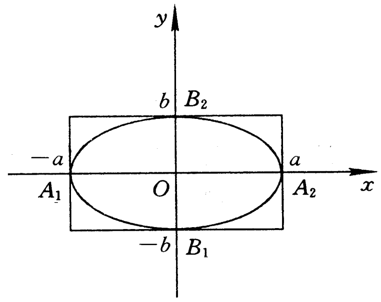

图 10-8

2. 对称性

在椭圆的标准方程中，以 $-y$ 代替 y，$-x$ 代替 x，或同时以 $-x$，$-y$ 代替 x，y，方程都不变，故椭圆的图像关于 x 轴，y 轴和原点都对称. 这时，坐标轴是椭圆的**对称轴**，原点是椭圆的**对称中心**.

以上讨论，也适用于一般曲线，现列表 10-1 如下：

表 10-1

条　　件	曲线的对称性
以 $-y$ 代替 y，方程不变	曲线关于 x 轴对称
以 $-x$ 代替 x，方程不变	曲线关于 y 轴对称
以 $-x$ 代替 x，同时以 $-y$ 代替 y，方程不变	曲线关于原点对称

3. 顶点

在标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，令 $x=0$，则$y=\pm b$，令 $y=0$，则 $x=\pm a$，所以椭圆与 x 轴的交点坐标是 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，与 y 轴的交点坐标是 $B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$. 四点 A_1，A_2，B_1，B_2 称为**椭圆的顶点**. 线段 A_1A_2，B_1B_2 分别称为**椭圆的长轴和短轴**（如图 10-8 所示），其长度分别为 $2a$ 和 $2b$. a 和 b 分别称为**椭圆的长半轴长和短半轴长**.

4. 离心率

如图 10-9 所示，$\frac{b}{a}$的值越接近于 0，椭圆就越扁平；$\frac{b}{a}$的值越接近于 1，椭圆就越接于圆.

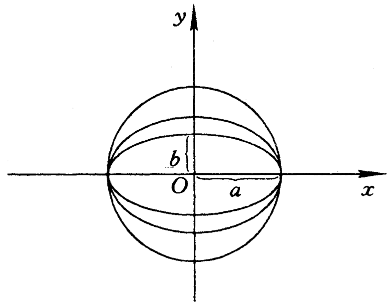

图 10-9

因为

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2},$$

所以$\frac{c}{a}$的值越接近于 1，椭圆就越扁平；$\frac{c}{a}$的值越接近于 0，椭圆就越接近于圆. 可见，$\frac{c}{a}$的值可刻画出椭圆的扁平程度，由此我们给出下面的定义.

定义　椭圆的焦距与长轴长之比，称为**椭圆的离心率**，通常用 e 表示，即

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因为 $0<c<a$，$0<e<1$，故椭圆的离心率是小于 1 的正数.

特别地，当 $a=b$ 时，椭圆的方程变成圆的方程.

例 3　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、顶点和焦点的坐标及离心率.

解　将已知方程两边同除以 400，得

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1.$$

化为标准方程，得

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

对照标准方程知 $a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$.

所以长半轴的长 $a=5$，短半轴的长 $b=4$，长轴的长 $2a=10$，短轴的长 $2b=8$，焦距 $2c=6$，半焦距$c=3$，顶点坐标为 $A_1(-5,0)$，$A_2(5,0)$，$B_1(0,-4)$，$B_2(0,4)$，焦点坐标为$F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=0.6$.

5. 椭圆的画法

椭圆的画法一般有以下步骤：

(1) 将方程化为标准方程，如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 作出由直线 $x=a$，$x=-a$，及 $y=b$，$y=-b$ 所围成的矩形；

(3) 根据关系式 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,给出满足 $0\leqslant x\leqslant a$ 的 x 的几个值,算出对应的 y 值,用描点法作出椭圆在第一象限内的图形;

(4) 利用椭圆的对称性,画出整个椭圆.

例 4　画出椭圆 $x^2+4y^2=9$ 的图像.

解　椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

作出由直线 $x=3$,$x=-3$,$y=\frac{3}{2}$,$y=-\frac{3}{2}$ 围成的矩形.

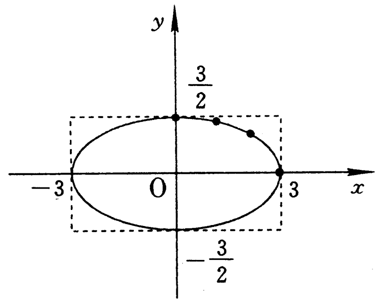

图 10-10

由方程 $x^2+4y^2=9$ 解得

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}.$$

根据关系式 $y=\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}$,算出 x ($0\leqslant x\leqslant 3$) 和 y 的几组对应值,列表如下:

x	0	1	2	3
y	1.5	1.4	1.1	0

先用描点法画出椭圆在第一象限内的图形,再利用对称性画出整个椭圆,如图 10-10 所示.

例 5　设椭圆的焦距与长半轴之差为 2,离心率为 $\frac{3}{5}$,焦点在 x 轴上,求椭圆的标准方程.

解　由已知条件,有

$$\begin{cases}2c-a=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$a=10,\qquad c=6,$$

又由 $b^2=a^2-c^2$ 得

$$b^2=64,$$

故所求方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$$

习题 10-2(A 组)

1. 填空题：

(1) 已知椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,则长轴长为____,短轴长为____,离心率为____,顶点坐标为________,焦点坐标为________;

(2) 已知椭圆方程为 $4x^2+16y^2=25$,则长轴长为____,短轴长为____,离心率为____,顶点坐标为____,焦点坐标为________;

(3) 中心在原点,焦点在 x 轴上,且过两点$(\sqrt{2},1)$,$(0,\sqrt{2})$的椭圆标准方程为________,离心率为____________;

(4) 两半轴的和等于 8,焦距等于 8 的椭圆标准方程为____________;

(5) 椭圆$\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$,则 k 的值为________.

2. 平面内两定点距离等于 6,一动点 M 到这两个定点的距离的和等于 8. 建立适当坐标系,求动点 M 的轨迹方程.

扫一扫，获取参考答案

习题 10-2(B 组)

1. 根据下列条件,求椭圆的标准方程.

(1) 长轴长等于 12,焦距等于 8,焦点在 x 轴上;

(2) 顶点 $A(0,\pm4)$,焦点 $F(0,\pm3)$;

(3) 中心在原点,焦点在 x 轴上,半长轴为 2,且过点$(1,-1)$.

2. 椭圆的中心在原点,一个顶点和一个焦点分别是直线 $x+3y-6=0$ 与两坐标轴的交点,求椭圆的标准方程,并作图.

3. 一直线经过椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 的左焦点和圆 $x^2+y^2-2y-3=0$ 的圆心,求该直线的方程.

4. 一个圆的圆心在椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的右焦点上,并且通过椭圆在 y 轴上的顶点,求圆的方程.

5. 已知椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,离心率等于$\frac{1}{3}$,又知椭圆上有一点 M,它的横坐标等于右焦点的横坐标,而纵坐标等于 4,求椭圆的标准方程.

6. 椭圆的中心在原点,对称轴重合于坐标轴,长轴为短轴的二倍,并经过点$A(3,0)$,求椭圆的标准方程.

扫一扫，获取参考答案

10.3　双　曲　线

一、双曲线的定义和标准方程

1. 双曲线的定义

如图 10-11 所示，取一条拉链，先拉开一部分，分成两支，将一支剪短，把长的一支的端点固定在 F_1 处，短的一支的端点固定在 F_2 处，把笔尖放在 M 处，笔尖随拉链的拉开或合上，就画成一支曲线；再把短的一支的端点固定在 F_1 处，把长的一支的端点固定在 F_2 处，同样画出另一支曲线. 这两支曲线就是常见的双曲线，从这个作法中可以看到，笔尖（即动点 M）在移动时，它到两个定点 F_1 及 F_2 的距离的差始终保持不变.

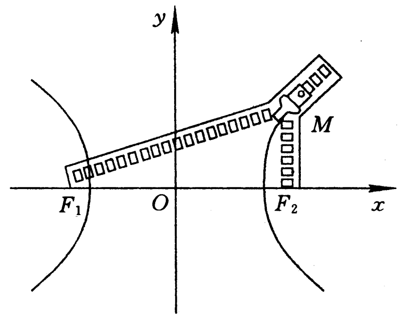

图 10-11

定义　平面上与两定点 F_1，F_2 的距离之差（小于 $|F_1F_2|$）的绝对值为常数的点的轨迹称为**双曲线**. 两定点 F_1 和 F_2 称为**双曲线的焦点**；两焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 称为**双曲线的焦距**，用 $2c$ 表示；c 称为**半焦距**.

2. 双曲线的标准方程

取过焦点 F_1，F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，如图 10-12 所示. 设 $M(x,y)$ 是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距为 $2c$（$c>0$），点 M 与 F_1 和 F_2 的距离之差的绝对值为 $2a$（$a>0$），则 F_1，F_2 的坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$. 由双曲线的定义，得

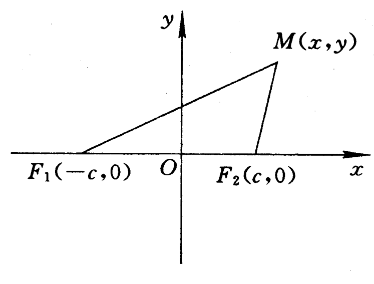

图 10-12

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

移项得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边平方并整理化简得

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

两边平方并整理得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

因为$\triangle F_1MF_2$的两边之差小于第三边，所以

$$2a<2c,\ a<c,\ a^2<c^2,\ c^2-a^2>0.$$

于是令

$$c^2-a^2=b^2\quad(b>0),$$

得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

两边同除以a^2b^2得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}\qquad(10\text{-}6)$$

方程(10-6)称为**双曲线的标准方程**，它所表示的双曲线的焦点在x轴上，焦点为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$. 其中，$c^2=a^2+b^2$.

例 1 设双曲线的焦点为$F_1(5,0)$与$F_2(-5,0)$，动点到两焦点的距离之差为8，求双曲线的标准方程.

解 设所求双曲线的标方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，由已知条件，知

$$2a=8,a=4,c=5.$$

于是

$$b^2=c^2-a^2=5^2-4^2=9,$$

即所求方程为

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

如果双曲线的焦点在y轴上，焦点是$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，设$M(x,y)$是双曲线上的任意一点，由双曲线的定义，得

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

可得它的另一标准方程为

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}\qquad(10\text{-}7)$$

它也是**双曲线的标准方程**，如图 10-13 所示. 其中a,b,c的关系仍是$c^2=a^2+b^2$. 方程(10-6)与(10-7)的区别是前者的焦点在x轴上，后者的焦点在y轴上.

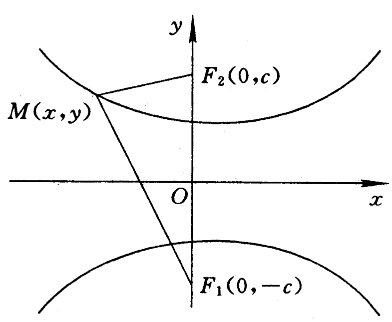

图 10-13

例 2　设双曲线的焦距为 $2\sqrt{5}$,焦点在 y 轴上,且 $a=1$,求双曲线的标准方程.

解　由题设所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$,依已知条件有

$$c=\sqrt{5},\ a=1.$$

于是

$$b^2=c^2-a^2=5-1=4.$$

故所求双曲线的标准方程为

$$y^2-\frac{x^2}{4}=1.$$

二、双曲线的形状、画法和离心率

下面以双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例,讨论其形状、画法及离心率.

1. 范围

由标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 知,双曲线上的任意点的坐标(x,y),都适合不等式$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 1$,即 $x^2\geqslant a^2$,于是有 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$,这说明双曲线在两条直线 $x=a$ 和$x=-a$的外侧,如图 10-14 所示.

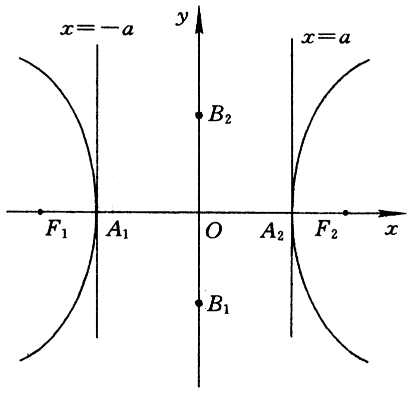

图 10-14

2. 对称性

在标准方程中,以$-y$ 代替 y,$-x$ 代 x,或同时以$-x$,$-y$ 代替 x,y,方程都不变,故图像关于 x 轴,y 轴和原点都对称. 这时,坐标轴是双曲线的**对称轴**,原点是双曲线的**对称中心**.

3. 顶点

在标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，令 $y=0$，则$x=\pm a$，所以双曲线与 x 轴的交点坐标是$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$两点；再令 $x=0$，得 $y^2=-b^2$，这个方程没有实数解，这说明双曲线与 y 轴不相交，但我们仍把$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$也画在 y 轴上. 双曲线与对称轴的交点，称为**双曲线的顶点**. 双曲线有两个顶点，分别为$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$. 线段 A_1A_2 称为**双曲线的实轴**，它的长等于 $2a$；线段B_1B_2 称为**双曲线的虚轴**，它的长等于 $2b$.

4. 渐近线

由双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

由此可见，当$|x|$无限增大时，$\frac{a^2}{x^2}$就无限减小，且趋近于零，$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$就无限接近于1，这时 y 将无限趋近于$\pm\frac{b}{a}x$，从而双曲线上的点就无限接近于直线$y=\pm\frac{b}{a}x$. 为此，我们把直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 称为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线.

不难看出，双曲线的渐近线就是四条直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围成的矩形的两条对角的直线，如图 10-15 所示.

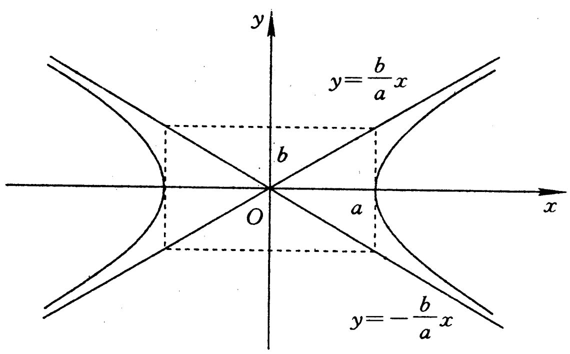

图 10-15

双曲线的渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 又可写成下面的形式：

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 和 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

如果把它们与双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 作比较就会发现，只要令方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左边等于零，即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

分解因式，得

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

即
$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad 及 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

这就是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程.

类似地，双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$.

5. 离心率

当$\frac{b}{a}$的值越大时，双曲线的“开口”就越大. 又因为

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1},$$

所以$\frac{c}{a}$的值越大，双曲线的“开口”越大. 因此$\frac{c}{a}$的值能刻画出双曲线“开口”的大小.

定义　双曲线焦距与实轴长之比，称为**双曲线的离心率**，通常用 e 表示，即

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因为 $c>a>0$，所以 $e>1$，即双曲线的离心率是大于 1 的数.

例 3　求双曲线 $4x^2-16y^2=64$ 的实轴和虚轴的长，焦点和顶点的坐标，离心率和渐近线方程.

解　将已知方程化为标准方程，得

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

于是 $a=4$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$，所以双曲线实轴和虚轴的长分别为 $2a=8$，$2b=4$，焦点为 $F_1(-2\sqrt{5},0)$，$F_2(2\sqrt{5},0)$，顶点为 $A_1(-4,0)$，$A_2(4,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

6. 双曲线的画法

双曲线的画法一般有以下步骤：

(1) 将方程化为标准形式，如$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(2) 作出由直线 $x=a$，$x=-a$，及 $y=b$，$y=-b$ 所围成的矩形，画出它的两条对角线，两端延长即得渐近线；

(3) 根据关系式 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$，给出满足不等式 $x\geqslant a$ 的几个 x 值，算出对应的 y 值，用描点法作出双曲线在第一象限内的图形；

(4) 利用双曲线的对称性及其与渐近线的位置关系画出双曲线.

例 4 画出双曲线 $x^2-4y^2=16$ 的图像.

解 将方程

$$x^2-4y^2=16$$

化为标准方程

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1.$$

于是 $a=4$，$b=2$，即渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

作出由直线 $x=4$，$x=-4$ 及 $y=2$，$y=-2$ 所围成的矩形，画出它的两条对角线并延长，即得渐近线.

由标准方程解得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$，根据关系式 $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16}$，算出 x $(x\geqslant4)$和 y 的几组对应值，列表如下：

x	4	5	6	7
y	0	1.5	2.2	2.9

根据双曲线与其渐近线的关系可描出双曲线在第一象限内的图像. 再根据双曲线的对称性，画出整个双曲线的图像，如图 10-16 所示.

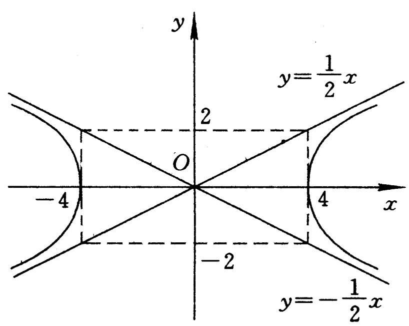

图 10-16

例 5 已知双曲线的焦点为(±3,0)，渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$，求双曲线的标准方程.

解　设所求双曲线的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则由已知条件得

$$\begin{cases} c=3, \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ b^2=c^2-a^2. \end{cases}$$

解这个方程组得 $a^2=8$，$b^2=1$，故所求方程为$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$.

三、等轴双曲线

在双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

中，如果 $a=b$，则方程变为

$$\boxed{x^2-y^2=a^2} \qquad (10\text{-}8)$$

方程(10-8)所表示的双曲线，其实轴长与虚轴长相等，所以称为**等轴双曲线**. 这时，因为 $a=b$，所以等轴双曲线的两条渐近线为

$$y=\pm x,$$

互相垂直，如图 10-17 所示.

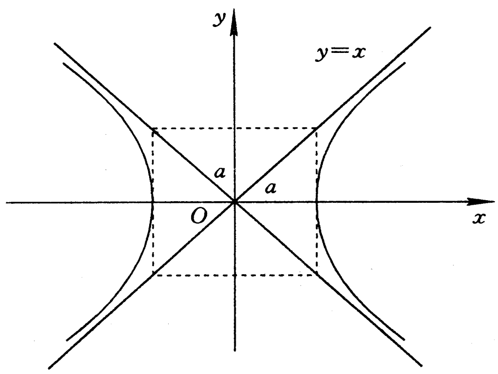

图 10-17

习题 10-3(A 组)

1. 填空题：

(1) 已知双曲线$\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$，则实轴长为____，虚轴长为____，顶点坐标

为____，焦点坐标为____，离心率为____，渐近线方程为________；

（2）已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=-1$，则实轴长为______，虚轴长为______，顶点坐标为____，焦点坐标为______，离心率为______，渐近线方程为____；

（3）已知双曲线 $4y^2-9x^2=36$，则实轴长为______，虚轴长为________，顶点坐标为________，焦点坐标为________，离心率为________，渐近线方程为________________；

（4）中心在原点，焦点在 y 轴上，且过点$(4\sqrt{2},9)$，$(2,3\sqrt{2})$的双曲线方程为______，离心率为______，渐近线方程为____________________；

（5）设曲线的方程为$\frac{x^2}{|k|-2}+\frac{y^2}{5-k}=1$，当曲线为双曲线时，$k$ 取值范围是________，焦点在 x 轴上时，k 取值范围是__________，焦点在 y 轴上时，k 取值范围是__________．

2. 求满足下列条件的双曲线方程．

（1）实轴等于6，两焦点为$(\pm4,0)$；

（2）焦点在 y 轴上，虚轴等于12，焦距为16．

扫一扫，获取参考答案

习题 10-3（B 组）

1. 求满足下列条件的双曲线标准方程．

（1）焦距等于16，离心率等于$\frac{4}{3}$；

（2）实轴在 y 轴上，渐近线方程为 $y=\pm\frac{5}{3}x$，且过点$(3\sqrt{3},10)$．

2. 求以双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点为顶点，顶点为焦点的椭圆方程．

3. 在双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上求一点，使该点与左焦点的距离等于它与右焦点的距离的2倍．

4. 已知双曲线的焦点坐标为$(\pm4,0)$，双曲线上的点到两焦点的距离的差的绝对值是6，求双曲线的方程．

5. 求过点 $A(3,1)$且实轴和虚轴都在坐标轴上的等轴双曲线方程．

6. 一动点到一定点 $F(3,0)$的距离和它到一条定直线 $x=\frac{3}{4}$ 的距离之比为2∶1，求动点的轨迹方程．

扫一扫，获取参考答案

10.4 抛 物 线

一、抛物线的定义和标准方程

如图 10-18 所示，在平板上作一条直线 l 及其直线外一定点 F，取一块直角三角板 ABC，使用它的直角边 BC 重合于直线 l，再取一条无伸缩性且与三角板的另一条直角边 AC 等长的线，一端固定在三角板的顶点 A 处，另一端固定在点 F 处，把笔尖放在 M 处，用笔尖沿着 AC 边把线拉紧，同时将三角板沿直线 l 上下滑动，于是笔尖就画出一条曲线，它就是抛物线.

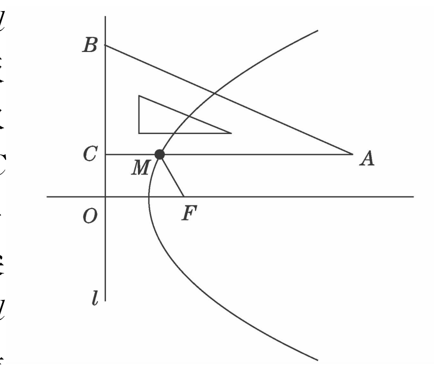

图 10-18

由上述过程可知，笔尖(即点 M)在移动时，它到定点 F 的距离始终等于它到定直线 l 的距离.

定义 平面上与一定点 F 和一定直线 l 的距离相等的点的轨迹称为**抛物线**，定点 F 称为抛物线的**焦点**，定直线 l 称为抛物线的**准线**.

取过焦点 F 且垂直于准线的直线为 x 轴，x 轴与直线 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，如图 10-19 所示. 设 $M(x,y)$是抛物线上的任意一点，$|KF|=p$，作 $MN\perp l$，垂足为 N，则焦点 F 的坐标为$\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，点 N 的坐标为$\left(-\frac{p}{2},y\right)$. 由抛物线的定义，得

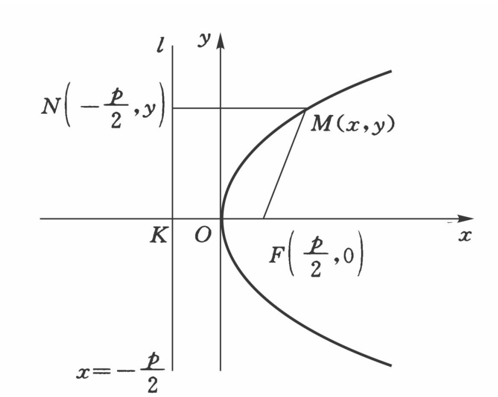

图 10-19

$$|MF|=|MN|.$$

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

化简整理得

$$\boxed{y^2=2px \quad (p>0)} \qquad (10\text{-}9)$$

方程(10-9)称为**抛物线的标准方程**，它所表示的抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上，坐标是 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，它的准线方程是 $x=-\frac{p}{2}$.

当我们以不同的方式建立直角坐标系时，还可得到抛物线其他形式的标准方程，如图 10-20 所示. 它们的方程分别是 $y^2=-2px\ (p>0)$，$x^2=2py\ (p>0)$，$x^2=-2py\ (p>0)$，焦点坐标分别是 $\left(-\frac{p}{2},0\right)$，$\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$，准线方程分别是 $x=\frac{p}{2}$，$y=-\frac{p}{2}$，$y=\frac{p}{2}$.

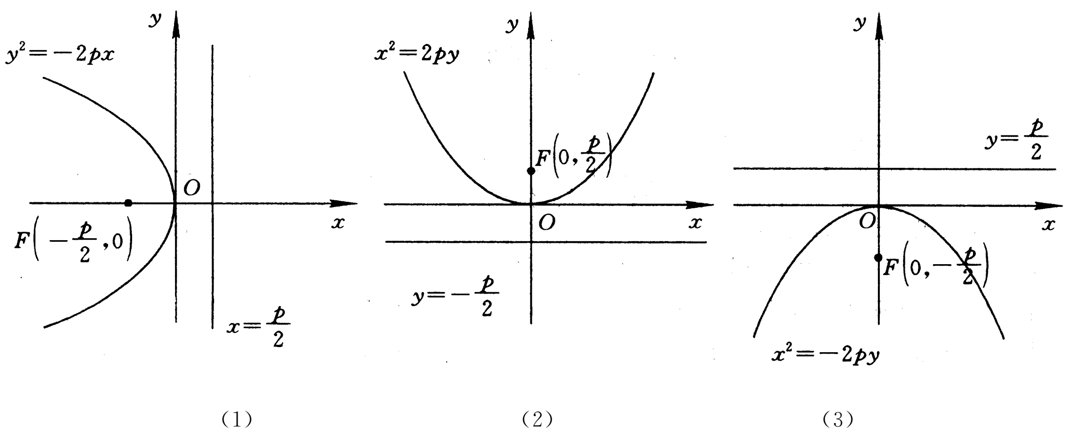

图 10-20

例 1　(1) 求抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标和准线方程；

(2) 已知抛物线的焦点坐标为 $F(0,-2)$，求它的标准方程.

解　(1) 因为 $2p=4$，$p=2$，所以焦点坐标为(1,0)，准线方程为

$$x=-1.$$

(2) 因为焦点在 y 的负半轴上，并且 $\frac{p}{2}=2$，所以 $p=4$，标准方程为

$$x^2=-8y.$$

二、抛物线的形状和画法

下面以抛物线的标准方程 $y^2=2px\ (p>0)$ 为例，讨论其形状和画法.

1. 范围

从上面方程可知，x 的取值范围是 $x\geqslant 0$，因为当 $x<0$ 时，y 无对应的实数值，这说明在 y 轴的左边没有抛物线的点.

2. 对称性

在方程(10-9)中,用$-y$代替y,方程不变,这说明抛物线关于x轴对称,因此,抛物线有一条对称轴:x轴.

3. 顶点

在标准方程中,令$x=0$得$y=0$,所以这条抛物线经过原点,抛物线和它的对称轴的交点,称为**抛物线的顶点**,抛物线$y^2=2px$的顶点在原点.

根据以上讨论可知,抛物线$y^2=2px$有如图10-19所示的形状,它的顶点在原点,对称轴重合于x轴,开口向右,整个图像在y轴的右侧.

类似(参见图10-20)可得:

抛物线$y^2=-2px$ $(p>0)$顶点在原点,对称轴重合于x轴,开口向左,整个图像在y轴的左侧;

抛物线$x^2=2py$ $(p>0)$顶点在原点,对称轴重合于y轴,开口向上,整个图像在x轴的上方;

抛物线$x^2=-2py$ $(p>0)$顶点在原点,对称轴重合于y轴,开口向下,整个图像在x轴的下方.

由上述讨论可知,画抛物线图像的一般步骤如下:

(1) 将所给方程化为$y^2=\pm 2px$或$x^2=\pm 2py$的标准形式;

(2) 根据方程中x和y的取值范围,判断抛物线的开口方向和对称轴;

(3) 列表求值,描点作图.

例2 已知抛物线关于x轴对称,它的顶点在原点,并且经过点$M(2,-2)$,求它的标准方程并作图.

解 由题意,设所求的标准方程为

$$y^2=2px.$$

因为点M在抛物线上,所以

$$(-2)^2=2p\cdot 2.$$

即

$$p=1,$$

故所求的抛物线方程为

$$y^2=2x.$$

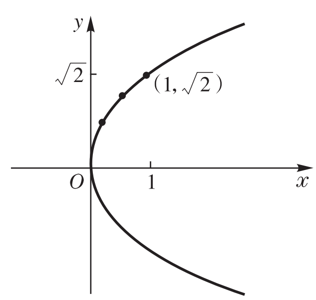

图 10-21

将已知方程变形为$y=\pm\sqrt{2x}$,根据$y=\sqrt{2x}$在$x\geqslant 0$的范围内算出几个点的坐标(x,y),如下表所示:

x	0	0.5	1	2	…
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	…

先描点画出抛物线在第一象限内的图形，再利用其对称性，画出整个抛物线，如图 10-21 所示.

例 3 求以原点为顶点，对称轴重合于坐标轴，并且经过点 $M(-5,-10)$ 的抛物线的标准方程.

解 如图 10-22 所示，由题意知抛物线图像有两种可能，开口向左或开口向下.

(1)设抛物线的开口向左，其标准方程为 $y^2=-2px$，因为点 $M(-5,-10)$ 在抛物线上，所以有

$$(-10)^2=-2p(-5),$$

即 $$p=10.$$

因此所求的抛物线的标准方程为 $y^2=-20x$.

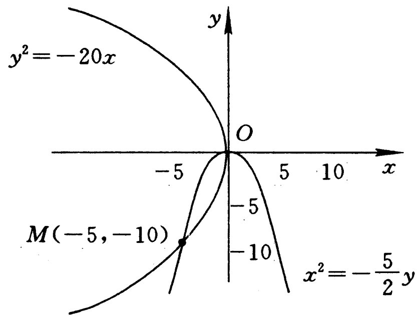

图 10-22

(2)设抛物线的开口向下，其标准方程为

$$x^2=-2py.$$

因为点 $M(-5,-10)$ 在抛物线上，所以有

$$(-5)^2=-2p(-10),$$

即 $$p=\frac{5}{4}.$$

因此所求的抛物线的标准方程为 $x^2=-\frac{5}{2}y$.

例 4 已知抛物线的顶点在原点，焦点在 y 轴上，抛物线上一点 $A(a,-8)$ 到焦点的距离是 10，求抛物线方程和 a 的值.

解 如图 10-23 所示，由题意可设抛物线方程为

$$x^2=-2py.$$

易得

$$|-8|+\frac{p}{2}=10,$$

即 $$p=4.$$

于是抛物线的方程为

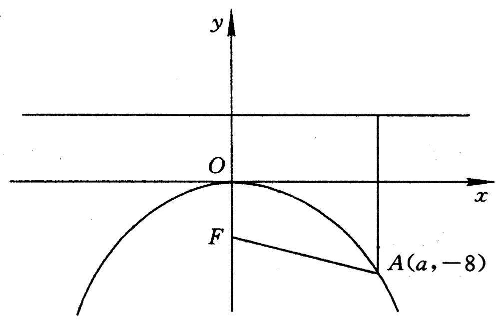

图 10-23

$$x^2=-8y.$$

又点 A 在抛物线上,故

$$a^2=-8(-8)=64,$$

即

$$a=\pm 8.$$

习题 10-4(A 组)

1. 填空题:

(1) 已知抛物线方程 $y^2=4x$,则对称轴方程为__________,焦点坐标为______,准线方程为______,开口方向是______;

(2) 已知抛物线方程 $x^2=-y$,则其对称轴方程为______,焦点坐标为______,准线方程为____________,开口方向是____________;

(3) 已知抛物线方程 $2y^2+5x=0$,则其对称轴方程为__________________,焦点坐标为__________________,准线方程为____________________,开口方向是__________________;

(4) 抛物线顶点在原点,对称轴为 y 轴,且过点$(1,-4)$,则抛物线方程为____________,焦点坐标为____________,准线方程为____________,开口方向是____________.

2. 根据下列条件,写出抛物线的标准方程.

(1) 焦点为 $F(4,0)$;

(2) 准线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}$;

(3) 开口向左,焦点到准线距离是 2.

扫一扫，获取参考答案

3. 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$上一点 M 与焦点 F 的距离$|MF|=2p$,求点 M 的坐标.

习题 10-4(B 组)

1. 已知一抛物线的焦点是直线 $4x-3y-12=0$ 与 Ox 轴的交点,求其标准方程.

2. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点,使它到焦点的距离等于 10.

3. 已知某抛物线以原点为顶点,焦点在 y 轴正半轴上,第一、三象限角的平分线被抛物线截出的线段长为 $8\sqrt{2}$,求此抛物线的方程.

4. 已知某抛物线的顶点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的中心,而焦点是双曲线的左顶点,求此抛物线的方程.

5. 某校有一台电视接收器，其反射镜面是旋转抛物面，它能把平行的电磁波集中到焦点处，现已知镜面口径 $AB=60$ cm，深度 $OC=40$ cm，如图 10-24 所示，求焦点位置．

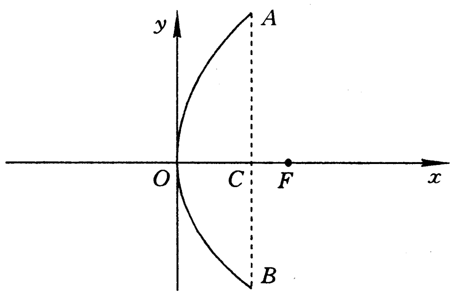

图 10-24

扫一扫，获取参考答案

复习题 10

1. 填空题：

(1) 动点到点 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$ 的距离的平方差是 48 的轨迹方程是____________；

(2) 已知点 $A(4,9)$，$B(6,3)$，则以线段 AB 为直径的圆的方程是__________________；

(3) 曲线 $x^2+y^2+2ax-4by=0$ 的中心坐标是____________；

(4) 如果椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，焦点在 x 轴上，又知椭圆经过点 $(4,2)$，那么椭圆的标准方程是____________；

(5) 如果双曲线的一个焦点是 $(0,4)$，一条渐近线方程是 $x+y=0$，则另一条渐近线方程是____________，双曲线的标准方程是____________；

(6) 顶点在原点，关于 y 轴对称，且过点 $A(-3,-4)$ 的抛物线标准方程是____________；

(7) 圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $4x-3y+25=0$ 的距离的最小值是________．

2. 选择题：

(1) 圆 $(x+a)^2+(y+b)^2=b^2\ (a\geqslant b)$，则这个圆应（　　）；

A. 与 x 轴相切　　B. 与 y 轴相切

C. 经过原点　　D. 与两坐标轴相切

(2) 已知椭圆的长轴长是短轴长的2倍，则它的离心率 e 是(　　)；

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

(3) 已知抛物线的焦点与圆 $x^2+y^2+6x=0$ 的圆心重合，则此抛物线的标准方程是(　　)；

A. $y^2=12x$　　B. $y^2=-12x$　　C. $y^2=6x$　　D. $y^2=-6x$

(4) 抛物线 $y=ax^2$ 的焦点坐标是(　　)；

A. $\left(0,\dfrac{a}{4}\right)$　　B. $\left(0,-\dfrac{a}{4}\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$　　D. $\left(0,-\dfrac{1}{4a}\right)$

(5) 若曲线 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 中的 α 满足 $90°<\alpha<180°$，则曲线应为(　　)；

A. 抛物线　　B. 双曲线　　C. 椭圆　　D. 圆

(6) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，方程 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的图形是(　　)；

A. 直线　　B. 圆　　C. 椭圆　　D. 半圆弧

(7) 直线 $4x-3y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 无公共点的充要条件是(　　).

A. $0<m<5$　　B. $1<m<5$　　C. $m>1$　　D. $m<0$

3. 三角形的三边所在直线的方程分别是 $x-6=0$，$x+2y=0$ 和 $x-2y-8=0$，求三角形外接圆的方程.

4. 椭圆的一个焦点把长轴分为两段，分别等于7和1，试求椭圆的标准方程.

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{64}=1$ 上的一点，它的横坐标等于15，试求该点到两个焦点的距离.

6. 求椭圆的离心率，已知从它的焦点看它的短轴两端所成视角是 $60°$.

7. 在抛物线 $y^2=4x$ 上求一点 P，使之到直线 $x-y+5=0$ 的距离最短.

8. 求直线 $y=x+2$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的线段长.

扫一扫，获取参考答案

[**阅读材料 10**]

二次曲线的光学性质及其应用

当你把汽车的前灯开关从亮转到暗时，就有数学在起作用. 具体地说，是抛

物线原理在玩花招.前灯后面的反射镜的截面具有抛物线的形状，如图 10-25 所示.事实上，它们是抛物线环绕它的对称轴旋转形成的抛物面.明亮的光束是由位于抛物线反射镜焦点上的光源产生的.因此，光线沿着与抛物线的对称轴平行的方向射去.当光源改变了位置，它不再在焦点上时，光线的行进不再与轴平行，光只向上下射去，而向上射出的被屏蔽，只有向下射出的近光，所以此时灯光变暗.人们已经证明了抛物线的这个重要性质：从焦点发出的光线，经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的轴，探照灯（如图 10-26 所示）也是利用这个原理设计的.

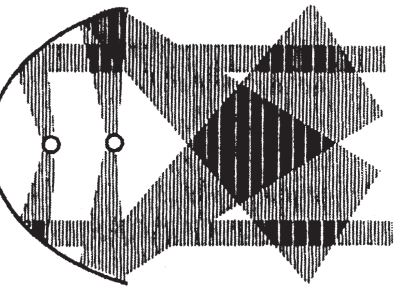
图 10-25

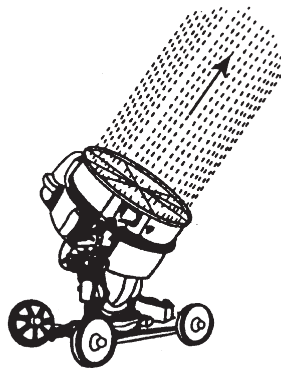
图 10-26

应用抛物线的这个性质，也可以使一束平行于抛物线的轴的光线，经过抛物面的反向集中于它的焦点.人们应用这个原理设计了一种加热水和食物的太阳灶，如图 10-27 所示.在这种太阳灶上装有一个旋转抛物面形状的反光镜，当它的轴与太阳光线平行时，太阳光线经过反射后集中于焦点处，这一点的温度就会很高.

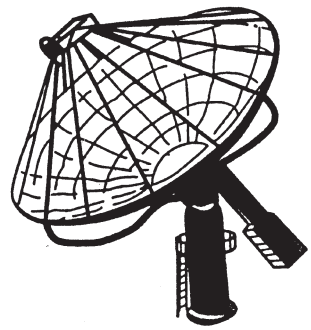
图 10-27

反射式望远镜是把双曲线和抛物线组合起来，让进入镜筒的光线在聚焦过程中来回往返，因而镜筒的长度比光线实际走过的路程短得多.这样就能使仪器的体积缩小，重量减轻，既经济、又方便.所以，现在的激光雷达和无线电接收装置都喜欢采用这种反射系统.

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线交于椭圆的另一个焦点上，如图 10-28 所示；从双曲线上的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦点射出的一样，如图 10-29 所示.椭圆、双曲线的光学性质

也常被人们广泛地应用于各种设计中.

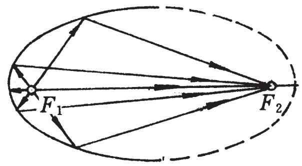

图 10-28

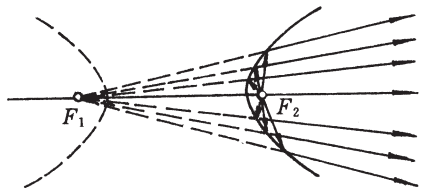

图 10-29

第 10 章单元自测

1. 填空题

(1)如果点 $A(1,y_0)$在曲线 $x^2-3x+2y-6=0$ 上,那么 $y_0=$____________;

(2)已知直线 $y=x+m$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切,则 m 的值为____________;

(3)圆心在 x 轴上,半径是 5,且与直线 $x=8$ 相切的圆的方程是____________;

(4)椭圆中心在原点,焦点在 x 轴上,半长轴为 2,过点$(1,-1)$,则此椭圆标准方程为________;

(5)与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 有共同的渐近线,且经过点$(-3,2\sqrt{3})$的双曲线方程为________.

2. 选择题

(1)方程 $2x^2+2y^2-4x+4y+6=0$ 所表示的曲线是(　　);

A. 椭圆　　B. 圆　　C. 抛物线　　D. 以上都不是

(2)抛物线 $y=-ax^2(a\neq0)$的焦点坐标是(　　);

A. $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$　　B. $\left(0,-\frac{1}{4a}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4a},0\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4a},0\right)$

(3)两圆 $x^2+y^2=4$ 与$(x-4)^2+(y+3)^2=9$ 的位置关系是(　　);

A. 相交　　B. 相外切　　C. 相内切　　D. 相离

(4)已知曲线方程是 $2x^2+3xy+y^2-4x+4=0$,那么在这条曲线上的点是(　　);

A. $(2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,-2)$

(5)在抛物线 $x^2=8y$ 上,且到焦点的距离为 4 的点的坐标为(　　).

A. $(4,2)$　　B. $(-4,2)$

C. $(4,2)$或$(-4,2)$　　D. $(4\sqrt{2},4)$或$(-4\sqrt{2},4)$

3. 解答题

(1)求圆心在直线 $2x-y+3=0$ 上,且过两点 $A(6,3)$,$B(-4,7)$的圆的方程;

(2)求经过点 $P(-2\sqrt{2},0)$与点 $Q(0,\sqrt{5})$的椭圆的标准方程;

(3)求渐近线为 $y=\pm\frac{2}{3}x$,且经过点 $M(\frac{9}{2},-1)$的双曲线的标准方程;

(4)一座抛物线形拱桥,当拱顶离水面 2 米时,水面宽 4 米,问水面下降 1 米后水面的宽度是多少?

扫一扫,获取参考答案