"十三五"职业教育国家规划教材

新编五年制高等职业教育教材

数学

（第4版）

（第1册）

SHUXUE

洪晓峰 张 伟◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

ISBN 978-7-5664-1623-0
定价：39.00元

“十三五”职业教育国家规划教材

新编五年制高等职业教育教材

数学

（第4版）

（第1册）

SHUXUE

主　编　洪晓峰　张　伟

副主编　周文龙　吴邦昆　江万满

编　委（按姓氏笔画排序）

仲继东　朱兴伟　江万满

李兰兰　吴邦昆　张　伟

陈　傑　周文龙　洪晓峰

葛文军　程堂宝

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.第1册/洪晓峰,张伟主编.—4版.—合肥:安徽大学出版社,2018.8(2021.11重印)

新编五年制高等职业教育教材

ISBN 978-7-5664-1623-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①洪…②张… Ⅲ.①数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第131285号

数 学(第1册)(第4版) 洪晓峰 张 伟 主编

出版发行:北京师范大学出版集团
安徽大学出版社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

印 刷:安徽昶颉包装印务有限责任公司
经 销:全国新华书店
开 本:184mm×260mm
印 张:15.5
字 数:306千字
版 次:2018年8月第4版
印 次:2021年11月第6次印刷
定 价:39.00元
ISBN 978-7-5664-1623-0

策划编辑:刘中飞 张明举 蒋 松
装帧设计:李 军
责任编辑:张明举
美术编辑:李 军
责任印制:赵明炎

编写说明

五年制高等职业教育《数学》教材自2001年(第1版)出版发行以来,得到了各级领导和专家以及教材使用学校的师生的肯定和支持.根据教学的实际情况和要求,我们曾分别于2003年和2007年对教材进行了修订.2011年我们在充分听取各方意见和广泛吸取同类、同层次教材的长处的基础上,再次对这套教材进行修订,修订后的第3版教材共分2册.第1册以初等数学为主,第2册以二次曲线、极坐标与参数方程、数列与数学归纳法、排列、组合、二项式定理以及一元函数微积分为主.特别要说明的是第3版教材的修订,教材结构变动较大,教材的质量得到进一步提高.在此衷心感谢为第3版教材的修订工作付出辛勤劳动的安徽机电职业技术学院夏国斌(第3版主编),安徽电气工程学校徐小伍,合肥铁路工程学校洪晓峰、葛文军,安徽化工学校周文龙、汪敏,安徽理工学校董安明,海军安庆市职业技术学校孙科,安徽省汽车工业学校章斌、徐黎,安徽省第一轻工业学校张永胜,安徽经济技术学院赵家成等老师.当然,我们也更不会忘记为本套教材(第1版)的出版作出重要贡献的夏国斌、韩业岚、李立众、姜绳、梁继会、刘传宝、吴方庭、辛颖、程伟、高山、吴照春、王芳玉、刘莲娣、杨兴慎、陈红、潘晓安等老师.

为了让本套教材更贴近目前五年制高职数学教学的实际,在保持第3版原有结构的基础上,我们再次对教材进行修订.本次修订对第3版的内容进行了部分增减和调整,修订后的第4版教材仍分2册,第1册内容包括:集合、充要条件、不等式,函数,任意角的三角函数,简化公式、加法定理、正弦型曲线,反三角函数、解斜三角形,平面向量,复数,空间图形,直线等.第2册内容包括:二次曲线,坐标转换与参数方程,排列、组合、概率初步,数列,极限与连续,导数与微分,导数的应用,积分及其应用,简单的微分方程等.修订后的第4版全套教材主要体现以下特色:

1. 简明易学,使用方便.教材在内容的组织与编排方面,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,适应学生的年龄特点和认知水平,力求紧密结合实际.为使教材更具弹性,更趋完善,能够适应更多专业的需要,我们安排了一定数量的选学内容("*"号标记).在练习的安排上,采取多梯度安排练习题的方式,教材每节内容后均配有A(基础题)、B(提高题)两套课外习题,每章后还配有复习题和单元自测题,可供学生进行单元复习和自我检测.另外,本套教材中所有的习题、复习题及自测题都提供了参考答案,使用者可通过扫描二维码查阅.

2. 紧密结合实际.注重从生活中的实际问题引入数学概念,利用数学知识解决实际问题.

3. 体现时代特征.一方面,强调对计算器的使用,将相关知识点与计算器的使用相结合;另一方面,将一些教学内容与常用计算机软件有机结合起来,利用软件的强大功能,方便教师的教学,增强学生对数学的理解,提高教学效率.

4. 拓宽视野.每章后附有阅读材料,内容涉及数学史及相关知识应用案例.

本套教材主要适用于五年制高等职业教育数学课程,同时也可以作为中等职业教育数学课程学习的辅助用书.教材必学部分的教学时数约为200学时.

在教材的编写、修订过程中,我们得到了有关部门、各有关学校及安徽大学出版社的大力支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢!

限于编者的学识和水平,教材中出现的错误、疏漏和不完善之处在所难免,敬请使用本教材的师生和同行予以指正.

编　者

2018年7月

第 1 章

集合　充要条件　不等式

集合是数学中最基本的概念之一.本章首先介绍有关集合的一些重要概念、常用符号和简单运算,然后学习一些命题的初步知识,最后讨论一元二次不等式及其他常见类型不等式的解法.

1.1　集合的概念

一、集合的意义

我们在初中用过“集合”这个词,例如整数集合,是把所有的整数作为一个整体加以研究.

我们把具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**(简称“集”),把构成集合的对象称为集合的**元素**.

下面来看几个例子:

(1) 某校一年级的全体学生构成一个集合,其中每个学生都是这个集合的元素.

(2) 某工厂金工车间的全部机床组成一个集合,车间中的每一台机床都是这个集合的元素.

(3) 所有自然数组成一个集合,自然数 $0,1,2,3,\cdots,n,\cdots$,都是这个集合的元素.

(4) 方程 $x^2-1=0$ 的所有实数根组成一个集合,这个集合有两个元素 1 与 -1.

(5) 不等式 $x-4>0$ 的所有解组成一个集合,显然,凡是大于 4 的实数都是这个集合的元素.

（6）平面上与两定点距离相等的点的全体组成一个集合，这样的集合是连接两点的线段垂直平分线，该垂直平分线上每一个点都是这个集合的元素.

若一个集合只含有限个元素，这样的集合称为**有限集合**；若集合含无限多个元素，这样的集合称为**无限集合**. 例如，在上面的例子中，（1）、（2）、（4）这三个集合是有限集合，而（3）、（5）、（6）这三个集合是无限集合.

一般地，一个集合，通常用大写字母 A、B、C、…表示，集合中的元素用小字母 a、b、c、…表示. 如果 a 是集合 A 中的元素，记为 $a\in A$，读作“a 属于 A”；如果 a 不是集合 A 中的元素，记为 $a\notin A$，读作“a 不属于 A”.

例如，在上例中，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，则 $2\in\mathbf{N}$，$0\in\mathbf{N}$，$-2\notin\mathbf{N}$.

由数组成的集合称为**数集**. 常见的数集及其符号如下表所示：

数　集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
符　号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

在数集中，若元素都是正数，应在集合记号的右上角标以“+”号；若元素都是负数，应在集合记号的右上角标以“−”. 例如：正有理数集记作 $\mathbf{Q}^+$，负实数集记为 $\mathbf{R}^-$. 特别地，在自然数集中排除 0 的集合，记为 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$.

满足方程（组）或不等式（组）的所有解组成的集合称为方程（组）或不等式（组）的**解集**.

只含有一个元素的集合称为**单元集**. 例如，方程 $x+1=0$ 的解集中只有一个元素 -1，这就是单元集.

不含有任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内解的集合就是空集. 至少有一个元素的集合称为**非空集合**.

二、集合的表示法

1. 列举法

把属于某个集合的元素一一列举出来，写在大括号{　}内，每个元素之间用逗号隔开，每个元素仅写一次，不考虑顺序，这种表示集合的方法称为**列举法**.

例如，小于 4 的自然数的集合可表示为 $\{0,1,2,3\}$.

当集合的元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他用省略号表示. 例如，小于 100 的自然数集可表示为 $\{0,1,2,3,\cdots,99\}$，正偶数集可表示为 $\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$.

2. 描述法

把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在大括号{　}内，这种表示集合的方法称为**描述法**.

例如，正偶数集$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$可表示为$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*\}$或{正偶数}.

其中竖线左边的x表示该集合的任意一个元素，竖线右边写出集合元素的特定性质.

又例如，反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$的图像上的点(x,y)组成的集合可表示为

$$\{(x,y)|y=\frac{1}{x},x\neq0\}.$$

例 1　用列举法表示下列集合：

(1) $\{x|x$是大于3且小于10的奇数$\}$；

(2) $\{x|x^2-5x+6=0,x\in\mathbf{R}\}$.

解　(1) $\{5,7,9\}$；

(2) 方程$x^2-5x+6=0$的解集为$\{2,3\}$，其中$x\in\mathbf{R}$一般可省略不写.

例 2　用描述法表示下列集合：

(1) 不等式$x-5>3$的解组成的集合；

(2) 在平面直角坐标系内，抛物线$y=x^2$上所有点组成的集合；

(3) 在平面直角坐标系的第Ⅰ象限内所有点组成的集合.

解　(1) 不等式$x-5>3$的解集可表示为：

$$\{x|x-5>3\},$$

即

$$\{x|x>8\}；$$

(2) 如图1-1(1)所示，在直角坐标系内，抛物线$y=x^2$上所有点的集合是$\{(x,y)|y=x^2\}$；

(3) 如图1-1(2)所示，在直角坐标系的第Ⅰ象限内所有点的集合是$\{(x,y)|x>0,y>0\}$.

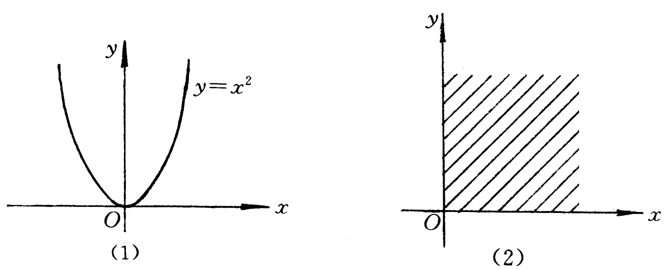


图 1-1

关于集合的概念,再作如下说明:

(1)作为集合的元素必须是确定的,否则就不能构成集合.这就是说,对于任何一个对象,或者属于这个集合,或者不属于这个集合,二者必居其一.

例如,某班高个子同学全体,就不能构成集合,因为没有规定多高才算是高个子,因而“高个子同学”不能确定.

(2)一个给定的集合,它的元素是互异的.也就是说,集合中的任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入同一个集合时只能算作集合的一个元素.

例如,方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集为$\{1\}$,但不能写成$\{1,1\}$.

(3)一个给定的集合,它的元素无先后顺序.

例如,集合$\{-2,2\}$和集合$\{2,-2\}$表示同一个集合.

三、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

由下面的两个集合

$$A=\{1,2,3\},B=\{1,2,3,4\}$$

可以发现,集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,因此,我们给出下面定义:

定义 设有两个集合 A 和 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则集合 A 称为集合 B 的**子集**,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

由定义可得:$A\subseteq A$.

规定:$\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一元素不属于 A,那么集合 A 称为集合 B 的**真子集**,记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

例如,$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}$,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{R}$.

根据真子集的定义,显然空集$\varnothing$是任何非空集合的真子集.

我们通常用平面上一个封闭曲线的内部表示一个集合(称为“文氏图”),如图 1-2 表示集合 A 是集合 B 的真子集.

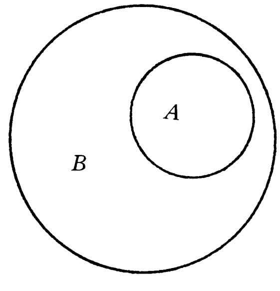


图 1-2

例 3 写出集合 $M=\{0,1,2\}$的所有子集,并指出哪些是真子集.

解 $\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{0,1\}$,$\{0,2\}$,$\{1,2\}$,$\{0,1,2\}$.

集合 M 的子集共有 8 个,其中除$\{0,1,2\}$外,其余都是 M 的真子集.

2. 集合的相等

定义　对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称集合 A 和集合 B **相等**，记作 $A=B$.

由定义可知，两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同.

例如，$\{1,2,3,4\}=\{3,2,4,1\}$.

例 4　讨论集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 与集合 $B=\{1,2\}$ 之间的关系.

解　由方程 $x^2-3x+2=0$ 解得，$x_1=1$，$x_2=2$. 于是，$A=\{1,2\}$，因为集合 A 与集合 B 元素相同，所以，$A=B$.

习题 1-1(A 组)

1. 按以下语句给出的条件是否能组成集合？

(1) 某图书馆的全部藏书；

(2) 某商场漂亮服装的全体；

(3) 所有的钝角三角形.

2. 写出下列集合的元素：

(1) 一年中有 31 天的月份的集合；

(2) 平方后仍等于原数的数的集合；

(3) 英文元音字母的集合.

3. 用适当的符号($\in$，$\overline{\in}$，$=$，$\supseteq$，$\subseteq$)填空：

(1) 3 ____ $\mathbf{N}$；　(2) 0 ____ $\mathbf{Z}^+$；　(3) π ____ $\mathbf{Q}$；

(4) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{N}$；　(5) a ____ $\{a\}$；　(6) 0 ____ $\varnothing$；

(7) $\{a,b,c\}$ ____ $\{c,b,a\}$；　(8) $\varnothing$ ____ $\{a,b\}$.

4. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 小于 10 的所有正整数的平方数；

(2) 直线 $y=2x$ 上所有点；

(3) 方程组 $\begin{cases}x+y=2\\ xy=-3\end{cases}$ 的解集；

(4) 不等式 $3(x-1)<2x-5$ 的解集.

扫一扫，获取参考答案

5. 写出 $\{a,b,c,d\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是真子集.

习题 1-1(B 组)

1. 用适当的符号($\in$，$\overline{\in}$，$=$，$\subseteq$，$\supseteq$)填空：

(1) -3 ____ $\mathbf{Q}^{-}$；　(2) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{R}$；　(3) π ____ $\mathbf{Q}$；

(4) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{R}$；　(5) $\{x \mid x>2\}$ ____ $\{x \mid x>3\}$.

2. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2+6x+9=0$ 的解集；

(2) 数轴上点 $x=3$ 左方的所有点；

(3) 直角坐标系第Ⅱ象限内的所有点；

(4) 所有 4 的正整数倍且小于 100 的数.

3. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，写出集合 A 中符合下列条件的子集：

(1) 元素都是质数；

(2) 元素都能被 3 整除；

(3) 元素都能被 2 整除.

4. 讨论下列各题中两个集合间的关系：

(1) $A=\{x \mid 0 \leqslant x<1\}$；　$B=\{x \mid x-2<0\}$；

(2) $A=\{x \mid x=2n, n \in \mathbf{Z}\}$；　$B=\{x \mid x=2(n+1), n \in \mathbf{Z}\}$.

扫一扫，获取参考答案

1.2　集合的运算

一、交集

先看一个例子，某商店进了两批货，第一批有服装、文具、自行车、化妆品、皮鞋五个品种，第二批有化妆品、自行车、电子表、收录机四个品种，分别记作：

$$A=\{\text{服装，文具，自行车，化妆品，皮鞋}\},$$

$$B=\{\text{化妆品，自行车，电子表，收录机}\}.$$

试问：两次进货都有的品种有哪些？显然两批货物的公共元素是化妆品和自行车，它们组成的集合是

$$C=\{\text{化妆品，自行车}\}.$$

对于这样的集合，给出以下定义：

定义　设 A、B 是两个集合，把既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A \cap B$，读作“A 交 B”，即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

因此，在上面的例子中有

$$C=A\cap B.$$

按照集合 A 与集合 B 本身的相互关系，它们的交集有如图 1-3 所示的四种情形，图中阴影部分表示 $A\cap B$.

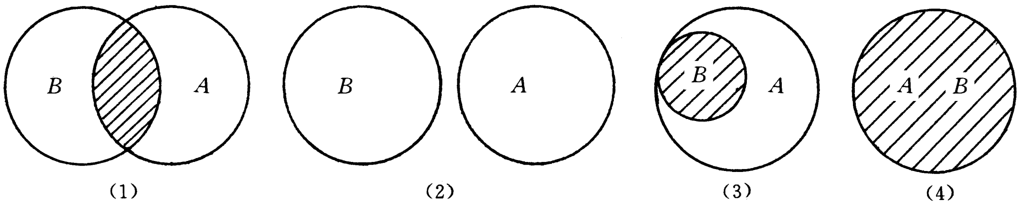


图 1-3

由交集定义可得：

$$A\cap B\subseteq A,\qquad A\cap B\subseteq B,$$
$$A\cap A=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

求集合的交集的运算称为**交运算**.

例 1　设 $A=\{奇数\}$，$B=\{偶数\}$，$Z=\{整数\}$，求 $A\cap Z$，$B\cap Z$，$A\cap B$.

解　$A\cap Z=\{奇数\}\cap\{整数\}=\{奇数\}=A$；

$B\cap Z=\{偶数\}\cap\{整数\}=\{偶数\}=B$；

$A\cap B=\{奇数\}\cap\{偶数\}=\varnothing$.

例 2　设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解　
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}\\&=\{(1,2)\}.\end{aligned}$$

例 3　设 $A=\{12\text{ 的正约数}\}$，$B=\{18\text{ 的正约数}\}$，$C=\{不大于 5 的自然数\}$，求(1) $(A\cap B)\cap C$；　(2) $A\cap(B\cap C)$.

解　因为，$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，

$B=\{1,2,3,6,9,18\}$，

$C=\{0,1,2,3,4,5\}$，

所以，(1) $(A\cap B)\cap C=\{1,2,3,6\}\cap\{0,1,2,3,4,5\}$

$=\{1,2,3\}$；

(2) $A\cap(B\cap C)=\{1,2,3,4,6,12\}\cap\{1,2,3\}$

$=\{1,2,3\}$.

由交集定义可得，交运算满足：

交换律：　$A\cap B=B\cap A$.

结合律：　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

二、并集

在本节开始的例子中，如果要问两次进货的品种总共有哪些？显然是两批货物的全部品种组成的集合，即：

$D=\{$服装，文具，自行车，化妆品，皮鞋，电子表，收录机$\}$.

对于这样的集合，给出以下定义：

定义　设 A 和 B 是两个集合，把所有属于 A 的元素和属于 B 的元素合并在一起组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

因此，在上面的例子中有 $D=A\cup B$.

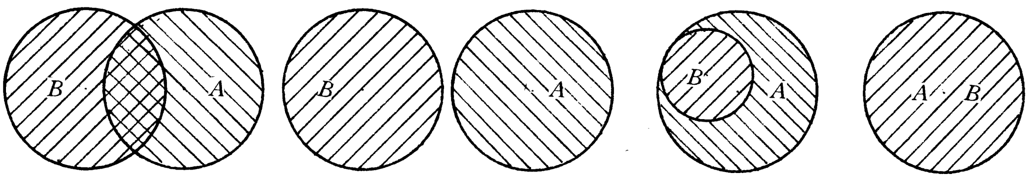
上面定义中的“$x\in A$ 或 $x\in B$”包含了三种可能的情况：

(1) $x\in A$ 但 $x\notin B$；

(2) $x\in B$ 但 $x\notin A$；

(3) $x\in A$ 且 $x\in B$.

在一个具体问题中，这三种情况不会同时出现，但是，不管出现哪一种情况，$A\cup B$ 中的元素都至少属于 A 或 B 中的一个，图 1-4 中的阴影部分表示$A\cup B$.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 1-4

由并集定义得：

$$A\subseteq A\cup B,\qquad B\subseteq A\cup B,$$
$$A\cup A=A,\qquad A\cup\varnothing=A.$$

求集合的并集的运算称为**并运算**.

例 4　设 $A=\{x\mid (x-1)(x+2)=0\}$，$B=\{x\mid x^2-4=0\}$，求 $A\cup B$.

解　因为，$A=\{x\mid (x-1)(x+2)=0\}=\{1,-2\}$，

$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2,2\}$，

所以，$A\cup B=\{1,-2\}\cup\{-2,2\}=\{-2,1,2\}$.

例 5　设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}=\{$斜三角形$\}$.

例 6　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，$C=\{-2,0,2\}$，求：

(1) $(A\cup B)\cup C$；　(2) $A\cup(B\cup C)$.

解　因为，$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$，$B\cup C=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以，(1) $(A\cup B)\cup C=\{-1,0,1,2\}\cup\{-2,0,2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，

(2) $A\cup(B\cup C)=\{1,2\}\cup\{-2,-1,0,1,2\}=\{-2,-1,0,1,2\}$.

由并集定义可得，并运算满足：

交换律：　$A\cup B=B\cup A$.

结合律：　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

并集与交集除各自满足交换律和结合律外，交、并运算还有如下两个分配律：

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

例 7　设 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{1,4\}$，求 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

解　$(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)=\{0,1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$.

三、补集

我们在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的**全集**，通常用 I 表示. 全集 I 一般用矩形来表示. 在研究数集时，一般将实数集 R 作为全集.

设集合 A 是全集 I 的子集，I 中不属于 A 的元素组成一个新的集合，对于这样的集合我们给出下面的定义：

定义　设 A 为全集 I 的子集，由 I 中不属于 A 的元素组成的集合称为集合 A 在 I 中的**补集**，记作 $\complement_I A$，读作“A 在 I 中的补集”，即

$$\complement_I A=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

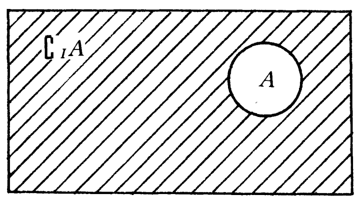


图 1-5

集合 A 的补集 $\complement_I A$ 为如图 1-5 所示的阴影部分，由补集的定义和图 1-5 可得：

$A\cup\complement_I A=I$，　$A\cap\complement_I A=\varnothing$，　$\complement_I I=\varnothing$，

$\complement_I\varnothing=I$，　$\complement_I(\complement_I A)=A$.

求集合的补集的运算称为**补运算**.

必须注意：补集是相对全集而言的，即使是同一个集合，如果所讨论的范围不一样，取的全集不同，则它的补集也不同.

例 8　设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,7,8\}$，求 $\complement_I A$，$\complement_I B$.

解　$\complement_I A=\{1,2,6,7,8\}$，　$\complement_I B=\{1,2,3,5,6\}$.

例 9　设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$，求证：

（1）$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$；

（2）$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

证明　（1）因为，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，
所以，$\complement_I(A\cup B)=\{7,8,9,10\}$.

又因为，$\complement_I A=\{2,4,6,7,8,9,10\}$，$\complement_I B=\{1,7,8,9,10\}$，

$$\complement_I A\cap\complement_I B=\{7,8,9,10\},$$

所以，$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$.

（2）因为，$A\cap B=\{3,5\}$，
所以，$\complement_I(A\cap B)=\{1,2,4,6,7,8,9,10\}$，

$$\complement_I A\cup\complement_I B=\{1,2,4,6,7,8,9,10\}.$$

所以，$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

上例所证的两个等式对于任意给定集合 A 和 B 也成立，称为**德·摩根**(De·Morgan)公式，也称**反演律**，即：

（1）$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$；

（2）$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$.

习题 1-2(A 组)

1. 已知两个集合 A 与 B，求 $A\cap B$，$A\cup B$：

（1）$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$；

（2）$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$；

（3）$A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=0\}$.

2. 设 $S=\{x\mid x\leqslant 3\}$，$T=\{x\mid x<1\}$，求 $S\cap T$ 及 $S\cup T$，并在数轴上表示出来.

3. 设 $A=\{12$ 的正约数$\}$，$B=\{18$ 的正约数$\}$，$C=\{$不大于 6 的自然数$\}$，求：

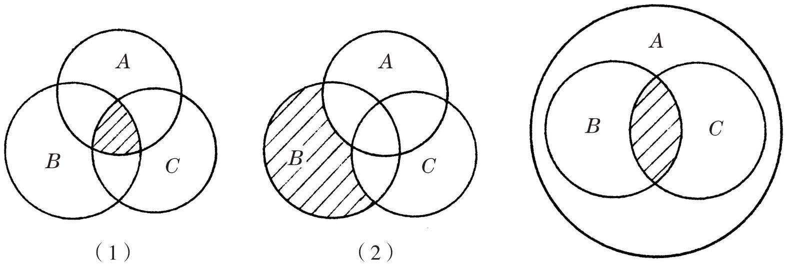
（1）$(A\cap B)\cap C$；

（2）$(A\cap B)\cup C$.

4. 设 $I=\{$小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求：

$\complement_I A$，$\complement_I B$，$\complement_I(A\cap B)$，$\complement_I A\cup\complement_I B$.

5. 用集合 A、B、C 的交、并、补来表示下列文氏图(如图 1-6 所示)中的阴影部分.



(1)　　(2)　　(3)

扫一扫，获取参考答案

图 1-6

习题 1-2(B 组)

1. 已知两个非空集合 $A\neq B$,在下列各题"____"处填上适当的符号:

(1) $A\cap B$ ____ $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$ ____ $B\cap A$;

(3) $A\cup B$ ____ B;　　(4) $A\cap B$ ____ B.

2. 设 $A=\{1,2,4,5,9\}$,$B=\{3,5,7\}$,$C=\{3,6,7,8,10\}$,求:

(1) $A\cup B\cup C$;

(2) $A\cap B\cap C$;

(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

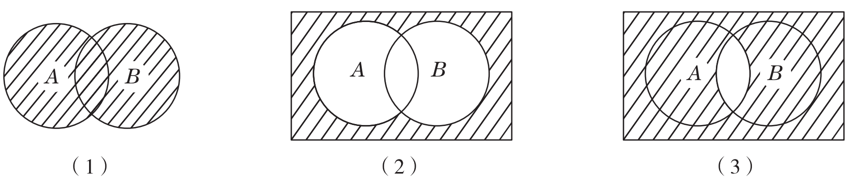
3. 设 $I=\{$不大于 10 的自然数$\}$,$A=\{1,2,4,5,9\}$, $B=\{3,6,7,8,10\}$,求:

(1) $\complement_I A\cup B$;

(2) $\complement_I A\cap\complement_I B$;

(3) $\complement_I(A\cap B)$.

4. 设 A 与 B 表示集合,用 A 与 B 之间的运算关系表示图 1-7 中阴影部分.



(1)　　(2)　　(3)

图 1-7

扫一扫，获取参考答案

1.3　充要条件

一、命题

1. 命题的意义

判断是一种思维形式，是借助于句子来表达的，人们通常把可以判断真假的陈述句称为**命题**. 一个命题由题设和结论两部分组成. 命题有真有假. 正确的命题是**真命题**，错误的命题是**假命题**. 命题的“真”和“假”，称为命题的**真值**. 分别用大写英文字母 T 和 F 表示.

例如：对顶角相等. 这是一真命题，用 T 表示.

相等的角是对顶角. 这是一假命题，用 F 表示.

2. 四种命题形式

如果用 P 和 Q 分别表示两个命题，那么四种命题的形式是：

原命题：$P\Rightarrow Q$；　　逆命题：$Q\Rightarrow P$；

否命题：$\neg P\Rightarrow \neg Q$；　逆否命题：$\neg Q\Rightarrow \neg P$.

其中“$\neg P$”（或“$\neg Q$”）是 P（或 Q）的否定，读作“P 非”（或“Q 非”）.

例 1　写出“两个三角形全等则面积相等”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假.

解　逆命题：如果两个三角形面积相等，则两个三角形全等.

否命题：如果两个三角形不全等则两个三角形面积不相等.

逆否命题：如果两个三角形面积不相等，则这两个三角形不全等.

以上原命题和逆否命题是真命题，逆命题和否命题是假命题.

四种命题之间的相互关系，如图 1-8 所示：

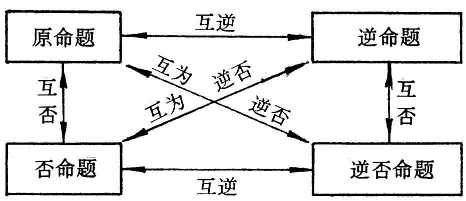


图 1-8

一般的，一命题的真假与其他三个命题的真假有如下三种关系：

(1) 原命题为真，它的逆命题不一定为真.

例如，原命题："若 $a=0$，则 $ab=0$"，是真命题，它的逆命题"若 $ab=0$，则 $a=0$"，是假命题.

(2) 原命题为真，它的否命题不一定为真.

例如，原命题"若 $a=0$，则 $ab=0$"，是真命题，它的否命题"若 $a\neq 0$，则 $ab\neq 0$"，是假命题.

(3) 原命题为真，它的逆否命题一定为真.

例如，原命题"若 $a=0$，则 $ab=0$"，是真命题，它的逆否命题"若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$"，是真命题.

二、充要条件

1. 充分条件与必要条件

前面我们讨论了"若 P 则 Q"形式的命题，其中有的命题为真，有的命题为假. "若 P 则 Q"为真，是指由 P 经过推理可以得出 Q，也就是说，如果 P 成立，那么 Q 一定成立. 记作 $P\Rightarrow Q$，或者 $Q\Leftarrow P$. 如果由 P 推不出 Q，命题为假，记作 $P\nRightarrow Q$.

一般地，如果已知 $P\Rightarrow Q$，那么，P 是 Q 的**充分条件**，Q 是 P 的**必要条件**.

例如，"$a=b$"是"$a^2=b^2$"的充分条件；"$a^2=b^2$"是"$a=b$"的必要条件.

例 2　设 P：两个三角形全等，Q：两个三角形面积相等. 问：P 是 Q 的什么条件，Q 是 P 的什么条件？

解　由 $P\Rightarrow Q$ 可知，P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件.

2. 充分必要条件

如果一个圆的两弦等长，那么这两弦的弦心距相等；反之，如果一个圆的两弦的弦心距相等，那么这两弦等长. 可以看出，"一个圆的两弦等长"既是"两弦的弦心距相等"的充分条件，又是必要条件. 这时，我们称"一个圆的两弦等长"是"两弦的弦心距相等"的充分必要条件.

一般地，如果既有 $P\Rightarrow Q$，又有 $Q\Rightarrow P$，那么，我们称 P 是 Q 的**充分必要条件**（简称**充要条件**），记作 $P\Leftrightarrow Q$，有时也称 P、Q **等价**.

例 3　说出下面各组条件之间的逻辑关系.

(1) "$\Delta=0$"与"一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个相等的实根"；

(2)“$a=-b$”与“$a^2=b^2$”.

解 (1)“$\Delta=0$”是“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个相等的实根”的充要条件;

(2)“$a=-b$”是“$a^2=b^2$”的充分条件,但不是必要条件,“$a^2=b^2$”是“$a=-b$”的必要条件,但不是充分条件.

习题 1-3(A 组)

1. 写出下列命题的否定,并判断它们的真假:

(1) P:$\sqrt{3}$是有理数;

(2) P:四边形不都是平行四边形.

2. 下列各命题作为原命题,写出它的逆命题、否命题、逆否命题,哪些是正确的?哪些是不正确的?

(1) 末位是 5 的整数,可以被 5 整除;

(2) 当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$;

(3) 线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

3. 在下列各题中填上适当的条件(充分条件、必要条件、充要条件):

(1) 四边相等的四边形是正方形__________;

(2) $b^2-4ac>0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$具有实根的________.

扫一扫,获取参考答案

习题 1-3(B 组)

1. 试写出下列命题的等价命题:

(1) 若 $ABCD$ 是四边形,则 $ABCD$ 是梯形;

(2) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根,则 $\Delta<0$.

2. 用充分条件、必要条件、充分必要条件填空:

(1) $x=4$ 是 $x^2-x-12=0$ 的________;

(2) $a>0$ 且 $b>0$ 是 $ab>0$ 的________;

(3) $a\in A$ 且 $a\in B$ 是 $a\in A\cap B$ 的________;

(4) $|a|=1$ 是 $a=-1$ 的________.

扫一扫,获取参考答案

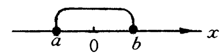
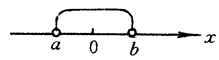
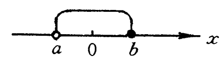
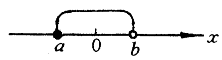
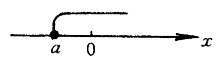
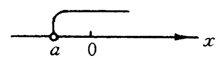
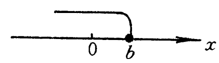
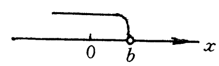
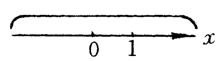
1.4　不 等 式

一、区间

介于两个实数之间的所有实数的集合称为**区间**，这两个实数称为**区间端点**.

设 a、b 为任意两个实数，且 $a<b$，规定如表 1-1 所示：

表 1-1

不等式	集　合	区　间	图　示
$a\leqslant x\leqslant b$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$闭区间	
$a<x<b$	$\{x\mid a<x<b\}$	(a,b)开区间	
$a<x\leqslant b$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	$(a,b]$左开右闭区间	
$a\leqslant x<b$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	$[a,b)$左闭右开区间	
$x\geqslant a$	$\{x\mid x\geqslant a\}$	$[a,+\infty)$	
$x>a$	$\{x\mid x>a\}$	$(a,+\infty)$	
$x\leqslant b$	$\{x\mid x\leqslant b\}$	$(-\infty,b]$	
$x<b$	$\{x\mid x<b\}$	$(-\infty,b)$	
$-\infty<x<+\infty$	$\mathbf{R}$	$(-\infty,+\infty)$	

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，端点间的距离称为**区间的长**. 区间的长为有限时，称为**有限区间**，区间长为无限时，称为**无限区间**.

这里，记号“∞”读作“无穷大”，它不表示某一个确定的实数，它描述了一个变量的绝对值无限增大的趋势，其中“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”.

二、不等式的性质

解不等式要对不等式变换形式，而不等式变换形式必须以不等式的基本性质作为依据，才能保证不等式变换形式的正确性.

不等式有以下一些基本性质：

性质 1　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

性质 2　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

推论　如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

性质 3　如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$，

　　如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

推论　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

三、不等式的解法

1. 一元一次不等式（组）

含有一个未知数并且未知数的次数是一次的不等式称为一元一次不等式，使不等式成立的未知数的取值称为不等式的解.

由两个或两个以上的一元一次不等式联立而成的不等式组，称为一元一次不等式组. 不等式组中所有不等式的公共解称为不等式组的解.

例 1　解不等式$\dfrac{2+x}{2}\geqslant\dfrac{2x-1}{3}$.

解　去分母，得 $3(2+x)\geqslant 2(2x-1)$，

去括号，得 $6+3x\geqslant 4x-2$，

移项，得 $3x-4x\geqslant -2-6$，

合并同类项，得 $-x\geqslant -8$，

将系数化为 1，得 $x\leqslant 8$.

所以，原不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant 8\}=(-\infty,8]$.

例 2　解不等式组：

(1) $\begin{cases}4x-4\geqslant 3x+1,\\3x+1>2x-1;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}<\dfrac{x+3}{5},\\2x+1<x+1;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}10+2x\leqslant 11+3x,\\7+2x>6+3x.\end{cases}$

解　(1)原不等式组可化为 $\begin{cases}x\geqslant 5,\\x>-2,\end{cases}$

所以原不等式组解集为

$$\{x|x\geqslant 5\}=[5,+\infty);$$

(2)原不等式组可化为$\begin{cases}x<2,\\x<0,\end{cases}$

所以原不等式组解集为

$$\{x|x<0\}=(-\infty,0);$$

(3)原不等式组可化为$\begin{cases}x\geqslant -1,\\x<1,\end{cases}$

所以原不等式组解集为

$$\{x|-1\leqslant x<1\}=[-1,1).$$

例 3 解下列不等式：

(1) $\dfrac{x+5}{x-8}>0$； (2) $\dfrac{2x+4}{x-3}\leqslant 1$； (3) $(2x-1)(2-x)<0$.

解 (1) $\begin{cases}x+5>0,\\x-8>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+5<0,\\x-8<0,\end{cases}$

得 $x>8$ 或 $x<-5$,

所以原不等式解集为$\{x|x>8$ 或 $x<-5\}$；

(2) $\dfrac{2x+4}{x-3}-1\leqslant 0$,$\dfrac{x+7}{x-3}\leqslant 0$,

$$\begin{cases}x+7\leqslant 0,\\x-3>0,\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+7\geqslant 0,\\x-3<0,\end{cases}$$

即$-7\leqslant x<3$,所以原不等式解集为$\{x|-7\leqslant x<3\}$.

(3)$\begin{cases}2x-1>0,\\2-x<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<0,\\2-x>0,\end{cases}$

得 $x>2$ 或 $x<\dfrac{1}{2}$. 所以原不等式的解集为$\{x|x>2$ 或 $x<\dfrac{1}{2}\}$.

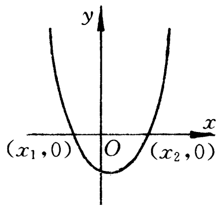
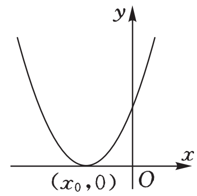
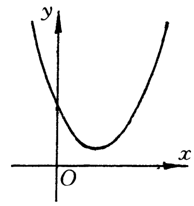
2. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二的不等式称为**一元二次不等式**,它的一般形式为：

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{或} \quad ax^2+bx+c<0 \quad (a>0).$$

一元二次不等式的解集与一元二次方程以及二次函数图像密切相关,设$y=ax^2+bx+c(a>0)$,如表 1-2 所示.

表 1-2

判别式		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
图像				
解集	$y>0$	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq x_0\}$	$\mathbf{R}$
	$y=0$	$\{x\mid x=x_1$ 或 $x=x_2\}$	$\{x\mid x=x_0\}$	$\varnothing$
	$y<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

例 4 解下列一元二次不等式：

(1) $3x^2-5x+2>0$；　　(2) $-x^2-2x+15\geqslant 0$；

(3) $2x^2-3x>-4$；　　(4) $x^2-6x\leqslant -9$.

解 (1) 因为 $\Delta=25-24=1>0$，方程 $3x^2-5x+2=0$ 有两个不相等实根：

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=1.$$

所以原不等式解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x<\frac{2}{3}\text{或 }x>1\right\}=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty).$$

(2)将原不等式化为 $x^2+2x-15\leqslant 0$，即 $(x+5)(x-3)\leqslant 0$，可以看出，方程 $x^2+2x-15=0$ 有两个不相等的实根：$x_1=-5$，$x_2=3$.

所以原不等式的解集为

$$\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 3\}=[-5,3].$$

(3) 将原不等式化为

$$2x^2-3x+4>0,$$

因为 $\Delta=-23<0$，方程 $2x^2-3x+4=0$ 无实根，所以原不等式解集为

$$\{x\mid x\in\mathbf{R}\}=(-\infty,+\infty).$$

(4) 将原不等式化为

$$x^2-6x+9\leqslant 0,$$

因为 $\Delta=0$，方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实根：

$$x_1=x_2=3.$$

所以原不等式解集为

$$\{x \mid x=3\}.$$

例 5　汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要继续往前滑行一段距离后才能停车，这段距离称为刹车距离，通过试验，得到某种牌子的汽车在一种路面上的刹车距离 S(m)与汽车车速 x(km/h)之间有如下关系：

$$S=0.025x+\frac{x^2}{360}.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 11.5 m，问这辆汽车刹车前的速度是多少？

解　依题意得 $S>11.5$，即 $0.025x+\dfrac{x^2}{360}>11.5$，整理得

$$x^2+9x-4140>0$$

解方程 $x^2+9x-4140=0$，得实根

$$x_1=-69, x_2=60.$$

所以不等式解为$\{x \mid x<-69 \text{ 或 } x>60\}$.

答：这辆汽车刹车前车速应大于 60 km/h.

3. 绝对值不等式

含有绝对值记号的不等式称为**绝对值不等式**. 当 $a>0$ 时，有

$$|x|<a \quad \Leftrightarrow \quad -a<x<a$$

$$|x|>a \quad \Leftrightarrow \quad x>a \text{ 或 } x<-a$$

如图 1-9 所示：

图 1-9

例 6　解下列不等式：

(1) $|4x-3|<5$；　　　　(2) $|x-3|\geqslant 1$.

解　(1) 原不等式等价于

$$-5<4x-3<5, \text{即} -2<4x<8,$$

解得

$$-\frac{1}{2}<x<2.$$

所以原不等式解集为$\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$；

（2）原不等式等价于 $x-3\geqslant1$ 或 $x-3\leqslant-1$，即

$$x\geqslant4 \quad 或 \quad x\leqslant2,$$

所以原不等式解集为$\{x|x\geqslant4 或 x\leqslant2\}$.

例 7 解不等式 $3x+|x|-4>0$.

解 原不等式可化为下面两个不等式组

$$（\mathrm{I}）\begin{cases}x\geqslant0,\\3x+x-4>0,\end{cases} \quad 或 \quad （\mathrm{II}）\begin{cases}x<0,\\3x-x-4>0,\end{cases}$$

解（Ⅰ）得$\{x|x>1\}$，解（Ⅱ）得$\varnothing$，所以原不等式解集为$\{x|x>1\}$.

习题 1-4(A 组)

1. 解下列不等式：

（1）$\dfrac{2x+5}{3}+\dfrac{1-2x}{6}\leqslant\dfrac{4x+7}{5}$；　　（2）$\dfrac{7x-2}{2}+\dfrac{x-2}{3}>2(x+1)$.

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}5x-3>0,\\x-2\geqslant5;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x+3<7,\\2x-3\leqslant x+2;\end{cases}$　　（3）$\begin{cases}\dfrac{2}{5}(x-2)\leqslant x-\dfrac{2}{5},\\15-9x>10-4x.\end{cases}$

3. 解下列不等式：

（1）$(3-2x)(2+x)>0$；　　（2）$\dfrac{2x-1}{x+4}>0$.

4. 解下列不等式：

（1）$x^2-6x-7\geqslant0$；（2）$x^2<9$；（3）$3x^2-7x+2\leqslant0$.

5. 解下列不等式：

（1）$|3x-5|\leqslant2$；　　（2）$\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|>4$.

6. k 为何值时，方程 $x^2-(k+2)x+4=0$ 有两个相异的实根？

扫一扫，获取参考答案

习题 1-4(B 组)

1. 解下列不等式：

（1）$\left|\dfrac{x-1}{2}+2\right|>\dfrac{3}{4}$；（2）$\left|\dfrac{3x-5}{4}+\dfrac{1}{6}\right|\leqslant\dfrac{2}{3}$.

2. 解下列不等式：

(1) $4x-15\geqslant x^2+2x$；

(2) $x(x-1)<x(2x-3)+2$；

(3) $\dfrac{2x-1}{3(x+1)}\geqslant 1$；

(4) $|2x^2+x|\leqslant 1$.

3. 方程 $(m+1)x^2-3x+2=0$ 有两个不相等的实数根，求实数 m 的取值范围.

扫一扫，获取参考答案

复习题 1

1. 选择题：

(1) 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，则 $\complement_I(A\cup B)=($　　$)$.

A. $\{2,3,4\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{5\}$

(2) 设全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，则 $(\complement_I A)\cap B=($　　$)$.

A. $\{2,4,5\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{1,3,4,5\}$　　D. $\{5\}$

(3) 设集合 $A=\{0,2\}$，集合 $B=\{1,a^2\}$，且 $A\cup B=\{0,1,2,4\}$，则 $a=($　　$)$.

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. ± 2

(4) 设全集 $I=\{1,3,5,7\}$，集合 $A=\{1,|a-5|\}$，$\complement_I A=\{5,7\}$，则 $a=($　　$)$.

A. 2　　B. 8　　C. 2 或 8　　D. 2 或 -8

(5) 若集合 M 满足 $M\subseteq\{1,2,3\}$，则 M 有(　　)种可能.

A. 4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

(6) “$xy=0$”是“$x^2+y^2=0$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

(7) “$x\in A$”是“$x\in A\cup B$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

(8) 若实数 a,b 满足 $a<b$，则下列式子一定成立的是(　　).

A. $ac<bc$　　B. $a+c<b+c$

C. $ac^2<bc^2$　　D. $|a|<|b|$

(9) 设 $M=\{x\,|\,x\leqslant\sqrt{13}\}$，$b=\sqrt{11}$，则下面关系正确的是(　　).

A. $\{b\}\subsetneqq M$　　B. $b\subsetneqq M$　　C. $b\notin M$　　D. $\{b\}\in M$

2. 当 m 是何实数时,方程 $2x^2+2(3-2m)x+2m+1=0$:

(1) 有两个不等实根?　　(2) 有两个相等实根?

(3) 没有实根?

3. 求下列不等式的解集:

(1) $2x^2-5x-3\geqslant 0$;　　(2) $4x^2-4x+1<0$;

(3) $x^2-2x+3>0$;　　(4) $-x^2+5x>0$;

(5) $|x^2-1|<3$.

4. 下列各对命题的相互关系怎样,它们是否等价?

(1) $P\Rightarrow Q$ 和 $\neg P\Rightarrow \neg Q$;　　(2) $Q\Rightarrow P$ 和 $\neg P\Rightarrow \neg Q$;

(3) $\neg Q\Rightarrow \neg P$ 和 $\neg P\Rightarrow \neg Q$.

5. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 1-\dfrac{x+1}{2}\leqslant 2-\dfrac{x+2}{3}, \\ x(x-1)\geqslant (x+3)(x-3); \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3+x<4+2x, \\ 5x-3<4x-1, \\ 7+2x>6+3x. \end{cases}$

6. 设全集 $I=R$,集合 $A=\{x|x^2-36<0\}$,集合 $B=\{x|x^2+2x-3<0\}$,求:

(1) $A\cap B$;

(2) $A\cup B$;

(3) $\complement_I A$;

(4) $\complement_I(A\cup B)$.

扫一扫,获取参考答案

[阅读材料1]

集合的元素个数与子集个数

在研究集合时,会遇到有关集合的元素个数和子集个数的问题,我们把有限集合 A 的元素个数记作 card(A). 例如,$A=\{a,b\}$,则 card$(A)=2$,子集个数为 4.

看一个有关集合元素个数的例子,某商店进了两批货,第一批有服装、文具、自行车、化妆品、皮鞋五个品种,第二批有化妆品、自行车、电子表、收录机四个品种,分别记作:

$A=\{$服装,文具,自行车,化妆品,皮鞋$\}$,

$B=\{$化妆品,自行车,电子表,收录机$\}$.

这里,card$(A)=5$,card$(B)=4$,求两次一共进了几种货;回答两次一共进

了 9（$=5+4$）种，显然是不对的，这个问题是要求 $\mathrm{card}(A\cup B)$. 在这个例子中，两次进的货里有相同的品种，相同的品种数实际就是 $\mathrm{card}(A\cap B)$. 由于

$$A\cup B=\{\text{服装,文具,自行车,化妆品,皮鞋,电子表,收录机}\},$$

$$A\cap B=\{\text{化妆品,自行车}\},$$

所以 $\mathrm{card}(A\cup B)=7$，$\mathrm{card}(A\cap B)=2$.

那么 $\mathrm{card}(A)$、$\mathrm{card}(B)$、$\mathrm{card}(A\cup B)$、$\mathrm{card}(A\cap B)$之间有什么关系呢？

一般地，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

例　某班有 7 名学生订了电脑报，有 10 名学生订了网络报，其中有 3 名学生订了上述两种报纸，问这个班共有多少人订了报纸？

解　设 $A=\{$订电脑报的学生$\}$，$B=\{$订网络报的学生$\}$，则

$$A\cap B=\{\text{同时订电脑报和网络报的学生}\},$$

$$A\cup B=\{\text{订电脑报或网络报的学生}\}.$$

由已知可得：$\mathrm{card}(A)=7$，$\mathrm{card}(B)=10$，$\mathrm{card}(A\cap B)=3$，所以

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)=7+10-3=14.$$

下面我们来看看一个有限集合 A 的元素个数 $\mathrm{card}(A)$与它的子集个数之间的关系：

例如，$A=\{1\}$，所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，即 $\mathrm{card}(A)=1$，子集个数为 2；$A=\{1,2\}$，所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，即 $\mathrm{card}(A)=2$，子集个数为 4；$A=\{1,2,3\}$，所有子集为：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，即 $\mathrm{card}(A)=3$，子集个数为 8.

一般地，对有限集合 A，若 $\mathrm{card}(A)=n$，则其子集个数为 2^n 个，其中真子集个数为 2^n-1 个.

第 1 章单元自测

1. 填空题

（1）不等式 $x^2-4|x|+3<0$ 的解集为____________.

（2）命题“若 $x_1>2$，$x_2>2$，则 $x_1+x_2>4$”的逆命题是__________________，命题的真假性是__________________.

（3）已知 p 是 q 的充分条件，q 是 r 的必要条件，又是 s 的充分条件也是 s 的必要条件，则 r 是 s 的__________条件，s 是 p ________条件，s 是 q 的________.

2. 选择题

（1）集合$\{0,1,2\}$的真子集个数是（　　）.

A. 2　　B. 5　　C. 7　　D. 8

（2）已知集合 $M=\{-1,1\}$，$N=\{0,a\}$，$M\cap N=\{1\}$，则 $M\cup N=$（　　）.

A. $\{-1,1,0,a\}$　　B. $\{-1,1,0\}$　　C. $\{0,-1\}$　　D. $\{-1,1,a\}$

（3）若集合 $A\cup B=\varnothing$，则（　　）.

A. $A\neq\varnothing,B\neq\varnothing$　　B. $B=\varnothing,A\neq\varnothing$

C. $A=B=\varnothing$　　D. $A=\varnothing,B\neq\varnothing$

（4）设集合 $M=\{$平行四边形$\}$，$P=\{$菱形$\}$，$Q=\{$矩形$\}$，$T=\{$正方形$\}$，则下面判断中，正确的是（　　）.

A. $(P\cup Q)\cup T=M$　　B. $P\cup Q=T$

C. $P\cap Q=T$　　D. $P\cup Q=M$

（5）图 1-10 阴影部分表示（　　）.

A. $(A\cap \complement_I C)\cup B$　　B. $(B\cap C)\cup A$

C. $(A\cup C)\cap B$　　D. $(A\cup C)\cap \complement_I B$

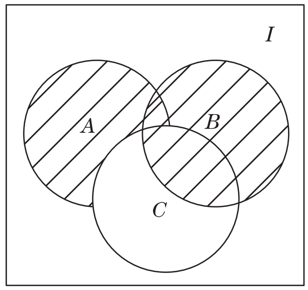


图 1-10

（6）设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则 $M\cap N=$（　　）.

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<2\}$

3. 解答题

（1）已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值.

（2）解下列不等式：

① $4<|1-3x|<7$；　② $\dfrac{x+1}{2x-3}<1$；　③ $(ax-2)(x-2)>0$.

（3）已知不等式 $kx^2-2x+6k<0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，求实数 k 的取值范围.

扫一扫，获取参考答案